EINLEITUNG

Dieser Band enthält das zweite Heft der *Miscellanea Mathematica* (MM) ab S. 104, Z. 29.

Die Aufzeichnungen stammen aus den Jahren 1808 bis 1811, was die Daten zeigen: »Den 27 Sept. 1808« auf MM 128, »Den 1. October 1808« auf MM 131; aus dem Jahre 1809 gibt es nur eine Datierung, »Den 12 Sept. 1809« auf MM 141, und von 1810 »den 14 Nov. 1810« auf MM 179. Im Jahre 1811 sind zwei Daten eingetragen worden: »den 13 Febr. 1811« auf MM 194 und »den 17 Febr. 1811« auf MM 196. Darüber hinaus ist noch ein vom April 1815 datierter Nachtrag in MM 182 vorhanden. Daraus ist, wie auch schon aus MM 2 und MM 19 im ersten Heft, ersichtlich, daß Bolzano bei der Ausarbeitung neuerer Versuche wiederholt seine alten Aufzeichnungen durchgesehen und kommentiert hat.

Im Zeitraum 1808–1811 hat Bolzano seine *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* veröffentlicht, teilweise unter Berücksichtigung von Notizen der MM. Um sich den Zusammenhang dieser Arbeit mit den MM klarzumachen, beachte man, daß die Veröffentlichung zwischen der Abfassung von MM 141 und MM 179 erfolgt ist. Diese Limitierungen ließen sich durch einen genaueren Vergleich der beiden Texte noch etwas verschärfen.

Die Aufzeichnungen im zweiten Heft der MM lassen sich in einige thematische Reihen anordnen, welche für sich Fortsetzungen der entsprechenden Reihen des ersten Heftes sind. Wir unterscheiden jetzt folgende Themen: *Elementargeometrie*, *Größenlehre*, *Mechanik*, mathematische *Methode und Ätiologie* sowie grundlegende Begriffsbildungen der *allgemeinen Geometrie*.

Die Aufzeichnungen zur *Elementargeometrie* zerfallen in zwei Gruppen: Berichtigungen der Abhandlung *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* von 1804 und eine Gruppe von Aufzeichnungen zum Aufbau eines schon in MM 37 angekündigten und in MM 100 (1808) in erster

Zusammenfassung dargestellten Systems der Geometrie. Es gibt in MM 104–210 mehrere Versuche, ein derartiges System zu konstruieren; in MM 181 (Dezember 1810) z.B. ein System von 17 Grundsätzen und dann in MM 182 ein nach kritischen Bemerkungen »verbessertes« System von 50 Grundsätzen. Eine neue Fassung der ersten 34 Sätze findet sich in MM 183, 184, und nach weiterer Erforschung der im System auftretenden Begriffe Punkt, Entfernung, Richtung, Entgegensetzung, Gegend und Seite folgt in MM 191 eine veränderte Fassung, die in MM 192 ausgearbeitet wird. Eine Revision des Begriffs der Richtung führt, in MM 195–196, abermals zu Veränderungen im Aufbau, ohne jedoch ein brauchbares System der Geometrie zu ergeben. Das gemeinsame Merkmal dieser Versuche ist wohl, daß der Ausgangspunkt zu allgemein gewählt ist. Man vergleiche z.B. den Begriff der Entgegensetzung in MM 184: »Zwey Dinge heißen entgegengesetzt wenn sie in allen Merkmalen gleich, bis auf ein einfaches Merkmal ungleich sind, daß dieses einfache Merkmal dem einen zukömmt, dem anderen abgesprochen wird, und beides nicht möglich ist.« Wenn man diesen Begriff z.B. zur Aufstellung von Grundsätzen über entgegengesetzte Richtungen verwenden will, muß man die erwähnten Merkmale angeben, und dabei ergeben sich ähnliche Schwierigkeiten. In der Weise aber ist Bolzanos Grundlegung fast verurteilt, ungenau zu bleiben, und obwohl die Versuche in MM 184–191 teilweise ihren Verdienst haben, verfehlen sie doch im ganzen das gesteckte Ziel. Eben deswegen und weil die mathematischen Begriffsbildungen nicht genügend entwickelt sind, wird hier von einer näheren Besprechung abgesehen.

Erheblich besser verhält sich die Sache mit jenen Aufzeichnungen, die sich auf die *Betrachtungen* beziehen. Für mehrere Sätze der *Betrachtungen* werden neue Beweise geführt, z.B. für § 29 in MM 113, für § 32 nach einem in MM 105 erwähnten Manuskript und für die §§ 34 und 46 in MM 105, 106. Ferner finden sich nähere mit dem Begriff des Winkels zusammenhängende Betrachtungen über die Kongruenzsätze für Dreiecke.

Um die mathematische Bedeutung der neuen Beweise der oben erwähnten Sätze der *Betrachtungen* in den MM richtig einzuschätzen, ist es zweckmäßig, sich einen Überblick über den mathematischen Inhalt der *Betrachtungen* zu verschaffen. Nun gibt Bolzano keine mathematische Begründung der Geometrie, sondern eine philosophische. Wir müssen also die philosophischen Teile ausscheiden und da anfangen, wo in der Abhandlung die Mathematik anfängt. Eine mathematische Wertung von Bolzanos Theorie, wie wir sie hier beabsichtigen, ist unseres Wissens bisher noch nicht vorgenommen worden, sollte aber doch einmal durchgeführt werden, da Bolzano bei seinem Aufbau so weit vorschreitet, daß er das Parallelenaxiom beweist.

Der Weg, den wir dabei beschreiten, ist einfach: Wir suchen die Teile, in denen mathematische Ergebnisse in nicht-mathematischer (philosophischer) Weise hergeleitet werden, verzichten auf die philosophische Begründung dieser mathematischen Behauptungen und setzen letztere als Axiome bei der Entwicklung des Systems der Elementargeometrie voraus. Man kann dann besser verstehen, warum Bolzano gewisse Beweise durch neue ersetzt hat, und es wird deutlich, wie es passieren konnte, daß Bolzano fast beiläufig das Parallelenaxiom bewiesen hat.

Es wird hier also ein allgemeineres Ziel gesetzt, als es für die Deutung der Bolzanoschen Änderungen der §§ 29, 32, 34 und 46 unbedingt notwendig ist. Aus dieser allgemeinen Zielsetzung ergibt sich die Forderung, eine Analyse der gesamten *Betrachtungen* durchzuführen.

Im allgemeinen sind die philosophischen Überlegungen leicht von den mathematischen zu trennen, doch könnten in einer gewissen Hinsicht Meinungsunterschiede bezüglich der Frage bestehen, welche Beweisgänge als philosophisch anzusehen sind und welche nicht, bei der Verwendung des Begriffs der Bestimmung nämlich. Es sei darum hier ausdrücklich hervorgehoben, daß wir alles, was mit dem Bestimmbarkeitsbegriff zusammenhängt, zur Philosophie rechnen und mithin unberücksichtigt lassen werden.

Aus dem Titel des ersten Teils der *Betrachtungen*, »Versuch die ersten Lehrsätze von Dreyecken und Parallellinien mit Voraussetzung der Lehre von der geraden Linie zu beweisen«, sehen wir, daß es ebenfalls notwendig ist, eine Analyse des zweiten Teils »Gedanken in Betreff einer künftig aufzustellenden Theorie der geraden Linie« durchzuführen. – Diese Analyse werden wir hier nicht in Einzelheiten wiedergeben, sondern wir begnügen uns damit, die Ergebnisse darzustellen, die wir zur Analyse des ersten Teils brauchen.

Der erste Satz aus Bolzanos Lehre der geraden Linie in *Betrachtungen II*, den wir brauchen, ist § 10: »Zu einem gegebenen Puncte a und in einer gegebenen Richtung aR gibt es Einen und nur Einen Punkt m, dessen Entfernung von a der gegebenen des Punctes y von x gleiche«. Dieser Satz besagt also die eindeutige Möglichkeit der Abtragung einer gegebenen Strecke aus einem Punkt einer gegebenen Geraden.

Wir ersetzen diesen Satz durch die Voraussetzung

V 1: Zu jeder Strecke xy und jeder Halbgeraden aR gibt es genau einen Punkt m in der Halbgeraden aR, so daß am = xy.

Ferner brauchen wir *Betrachtungen II* § 30: »Zu jeglichen zwey gegebenen Puncten a, b gibt es Einen und nur Einen Mittelpunct, d. h. Einen Punct, der aus beyden auf gleiche Art bestimmt wird«.

Der Beweis in *Betrachtungen II* ist schwach und beruht überdies auf der Existenz entgegengesetzter Richtungen, die laut Bolzano noch nicht gesichert ist.

Wir ersetzen diesen Satz unter Annahme eines begründeten Begriffs von Mittelpunkt durch die Voraussetzung

V 2: Zu jeder Strecke ab gibt es einen Mittelpunkt c.

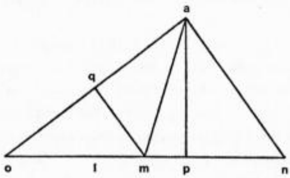
Schließlich brauchen wir von *Betrachtungen II* nur noch die sich nach Bolzano aus § 39 ergebende Folgerung § 42 Zusatz: »Also gibt es zu jeglichen drey gegebenen Linien Eine und nur Eine vierte proportionale Linie.«

Die diesem Satz entsprechende Voraussetzung nehmen wir hinzu als

V 3: Zu drei Strecken ab, cd, ef gibt es eine vierte gh, so daß ab : cd = ef : gh.

Diese Voraussetzungen reichen aus zur Analyse von *Betrachtungen I*, und wir werden hier zunächst zeigen, wie sie von Bolzano im Beweis des Satzes *Betrachtungen I* § 32, der besagt, daß sich aus einem Punkte außerhalb einer Geraden genau ein Lot ziehen läßt, verwendet werden. Der Beweis in *Betrachtungen I* stützt sich auf den Begriff der Ähnlichkeit und ist als nicht-mathematisch zu betrachten. Für den neuen Beweis verweist Bolzano in MM 105 auf das Manuskript *Elementa Arithmetices et Geometriae* aus dem Jahre 1808. Dieser Beweis wird unter Heranziehung der Theorie der geraden Linien aus *Betrachtungen II* geführt. Wir geben ihn hier wieder und vermerken die Stellen, wo die den Voraussetzungen V 1, V 2 und V 3 entsprechenden Sätze verwendet werden.

Es sei der Punkt a außerhalb der Linie l. Man wähle den Punkt m auf l und bestimme die Punkte o und n in l derart, daß om = mn = am (V 1). Dann bestimme man p auf l so, daß on : oa = oa : op (V 3) und man hat ∠apm = ∠apn. Denn es sei q die Mitte von oa (V 2), so ist mq lotrecht auf oa nach *Betrachtungen I* § 26. Ferner sind die Dreiecke oqm und oan ähnlich nach *Betrachtungen I* § 21, also auch an lotrecht auf oa. Zufolge der Bestimmung von p sind auch die Dreiecke opa



und oan ähnlich nach *Betrachtungen I* § 21, also $\angle$opa = $\angle$oan, d.h. ap lotrecht auf on.

Der Beweis ist insofern besser als der in *Betrachtungen I* § 32 geführte, als er den Gebrauch von *Betrachtungen I* § 30, d.h. den ungenauen Begriff der Ähnlichkeit, vermeidet. Die Eindeutigkeit des Lots wird zwar nicht bewiesen, doch das ließe sich unter Verwendung von V 3 und § 43 leisten. Der Eindeutigkeitsbeweis aus *Betrachtungen I* § 32 macht von Satz § 31 Gebrauch, den wir unten als U 4* zur Voraussetzung machen werden. Um den ganzen obigen Beweis in mathematischer Hinsicht einschätzen zu können, muß man also insbesondere die Stellung der Sätze § 21 und § 26 feststellen. Deswegen und darüber hinaus aus dem oben angeführten Grunde werden wir jetzt die Analyse von *Betrachtungen I* durchführen. Selbstverständlich müssen dabei auch einige der Bolzanoschen Begriffsbildungen analysiert werden.

Betrachtungen I beginnt mit einer Erklärung des Begriffs »Winkel«. Dieser Begriff ist in der Abhandlung ein wenig schwankend. Nach *Betrachtungen I* § 1 ist Winkel dasjenige Prädikat zweier Strecken ca, cb, welches jedem anderen System cα, cβ mit α in ca und β in cb gemeinschaftlich zukommt.

Die Strecken ca, cb sind also die bestimmenden Stücke des Winkels. Doch überlegt sich Bolzano, daß auch die bei a bzw. b ins Unendliche verlängerten Strecken, also die Halbgeraden (oder Richtungen, wie Bolzano auch wohl sagt) die bestimmenden Stücke des Winkels sind. Zu unserem Zwecke sind diese Betrachtungen belanglos, zumal es in *Betrachtungen II* § 12 heißt »Das System zweyer aus einem Puncte ausgehender Richtungen heißt ein Winkel«. Wir behalten also die übliche Erklärung des Winkels als die Figur zweier Halbgeraden l, m mit gemeinschaftlichem Endpunkt bei, mit der Bezeichnung $\angle$ (l,m).

Wir erhalten nun als erste Voraussetzung die Transformation von *Betrachtungen I* § 5:

U 1: $\angle$(l,m) = $\angle$(m,l).

In Übereinstimmung mit *Betrachtungen I* § 7 betrachten wir als Dreieck abc die Figur der Strecken ab, bc, ca. Der Begriff der Gleichheit zweier Dreiecke wird von Bolzano nicht hinlänglich erklärt. In *Betrachtungen I* § 11 nennt er zwei Dreiecke gleich, »die man sonst gleich und ähnlich nennt«. Im übrigen beweist Bolzano die Gleichheit zweier Dinge nach Leibniz, indem er die Gleichheit ihrer bestimmenden Stücke zeigt (*Betrachtungen I* § 6). Man könnte nun meinen, daß die Seiten ab, bc, ca die bestimmenden

Stücke des Dreiecks abc seien, doch ist das nach Bolzano nicht der Fall, denn in *Betrachtungen I* § 7 wird ein Dreieck durch einen Winkel und zwei Punkte in den Schenkeln erklärt. Erst in *Betrachtungen I* § 46 wird der Satz, daß die drei Seiten das Dreieck bestimmen, bewiesen.

Weil wir die Verwicklungen mit dem Begriff der Bestimmung vermeiden wollen, nehmen wir die Gleichheit (Kongruenz) der Dreiecke in der Bedeutung, daß $\triangle abc = \triangle a'b'c'$, wenn $ab = a'b'$, $ac = a'c'$, $bc = b'c'$, $\angle a = \angle a'$, $\angle b = \angle b'$, $\angle c = \angle c'$.

Es handelt sich bei der Feststellung der Gleichheit um sechs Merkmale im Bolzanoschen Sinne, und wir entgehen den Schwierigkeiten der Bolzanoschen Auffassung, derzufolge entweder die Feststellung der bestimmenden Stücke oder eine Musterung *aller* erkennbaren Merkmale nötig ist.

Die mehr oder weniger philosophischen Ausführungen in *Betrachtungen I* § 12–14 führen uns auf folgende Voraussetzung als Transformation von *Betrachtungen I* § 14:

U 2: Wenn $ab = a'b'$, $ac = a'c'$ und $\angle a = \angle a'$, so ist $\triangle abc = \triangle a'b'c'$.

Diese Voraussetzung ist also der erste Kongruenzsatz (SWS) für Dreiecke (vgl. Euklid: *Elemente I*, Prop. 4; D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, achte Auflage, Stuttgart 1956, Satz 12, S. 16).

Anschließend wird in *Betrachtungen I* § 21 der entsprechende Ähnlichkeitssatz hergeleitet, d.h. zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten um einen gleichen Winkel proportioniert sind, sind ähnlich (sws). Die Ähnlichkeit zweier Dinge ist nach *Betrachtungen I* § 16 Gleichheit aller Merkmale, die sich aus dem Vergleich der Teile unter sich in diesen beiden Dingen ergeben, und nach *Betrachtungen I* § 17 folgt die Ähnlichkeit zweier Dinge aus der Ähnlichkeit der bestimmenden Stücke. Die Ähnlichkeit zweier Strecken liegt in ihrem Verhältnis, und weil gleiche Winkel sicher ähnlich sind, folgt die Behauptung. Umgekehrt wird in *Betrachtungen I* § 22 gezeigt, daß ähnliche Winkel auch gleich sind. Wir könnten diesen Satz übergehen, doch lohnt es sich, etwas näher auf die verwendeten Begriffe einzugehen, weil mehr gebraucht wird, als Bolzano bisher entwickelt hat.

Das Wort »Winkel« bezeichnet im Beweis von *Betrachtungen I* § 22 nach Bolzano den Bestimmungsgrund alles an dem System zweier Richtungen am, an Unterscheidbare. Das sind zuerst die Entfernungen mn für alle Wahlen von m und n in den Schenkeln, dann die Entfernungen pr, wobei p in am und r in mn liegt, usw.

Wenn in zwei vorgegebenen Winkeln alle diese bemerkbaren Stücke gleich sind, so heißt das für Bolzano nichts anderes, als daß die Winkel gleich sind. Hier verwendet Bolzano im wesentlichen die Gleichheitsdefinition des Peletarius (1557), nach welcher die Winkel man und μαν gleich sind, wenn bei jeder Wahl von am = αμ, an = αν in den Schenkeln der beiden Winkel gilt mn = μν.

Diese Erklärung der Winkelgleichheit wird in MM 106 explizit als eine Möglichkeit erwähnt, den dritten Kongruenzsatz (SSS) ohne *Betrachtungen I* § 34 zu beweisen.

Peletarius wird erst in MM 147 (Ende 1809) bei der Besprechung von Kästners *Geschichte* genannt; vielleicht war diese Erklärung Bolzano aber schon früher mittelbar bekannt geworden.

Wenn wir nun die Ähnlichkeit ($\sim$) von Dreiecken – etwas überflüssig – als Proportionalität der Seiten und Gleichheit der Winkel erklären, so führt uns *Betrachtungen I* § 21 zu der Voraussetzung

U 3: Wenn $\angle a = \angle a'$ und $ab:a'b' = ac:a'c'$, so ist $\triangle abc \sim \triangle a'b'c'$.

Der Satz *Betrachtungen I* § 25 von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck wird fast mathematisch bewiesen. *Betrachtungen I* § 5, also U 1, wird stillschweigend angewandt, während Bolzano in *Betrachtungen II* § 14 gesteht, daß er für diesen Satz noch keinen befriedigenden Beweis hat.

Jetzt haben wir die Stelle in den *Betrachtungen I* erreicht, die aufs engste mit den in MM 105 genannten Verbesserungen zusammenhängt. Wir haben oben beim Beweis von *Betrachtungen I* § 32 nach dem Manuskript *Elementa* schon gesehen, daß Bolzano sich dabei auf *Betrachtungen I* §§ 21 und 26 stützt. Die Anwendung von § 21 bedeutet nach unserer Übersetzung Anwendung von U 3. Wie die Sache sich mit § 26 verhält, ist noch nicht klar. Die Unklarheit wird dadurch verursacht, daß der Beweis in *Betrachtungen I* § 26 die Behauptung des Lehrsatzes in *Betrachtungen I* § 26 – wie wir sie auffassen – nicht beweist. Der Lehrsatz besagt die Möglichkeit der Lotlinie in einem Punkt einer gegebenen Linie, während im Beweis nur dargetan wird, daß die Schwerlinie auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks senkrecht steht. Dieser Beweis macht vom Satz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck und von *Betrachtungen I* § 14, also von U 2, Gebrauch.

Wenn Bolzano aber in *Betrachtungen I* § 26 sagt »Es ist möglich aus einem Puncte einer geraden Linie eine andere so aufzurichten ...« so meint er: es gibt einen Punkt und eine gerade Linie ... Er braucht aber mehr, nämlich den Zusatz Betrachtungen I § 29, daß es möglich ist, aus *jedem* Punkt *jeder* geraden Linie eine andere so zu ziehen ...

Für Bolzano ist diese Behauptung, nach der Wolffschen Theorie der Ähnlichkeit, eine einfache Folgerung aus *Betrachtungen I* § 26.

Die in *Betrachtungen I* § 26 formulierte Eigenschaft der Schwerlinie im gleichschenkligen Dreieck können wir beibehalten, aber sogar *Betrachtungen I* § 29 kann beibehalten werden – allerdings nicht wegen des Beweises in der Abhandlung, sondern aufgrund des Beweises in MM 113, wo der Satz mathematisch unter Verwendung von V 3 und U 3 bewiesen wird.

Mit Ausnahme der Anwendung im Beweis von *Betrachtungen I* § 29 sind die Anwendungen von *Betrachtungen I* § 26 in dem Sinne harmlos, daß genau gebraucht wird, was tatsächlich bewiesen ist; insbesondere gilt dies vom Beweis des Satzes *Betrachtungen I* § 32 nach dem Manuskript *Elementa*.

Der nächste Satz, *Betrachtungen I* § 30, sowie seine Folgerung, § 31, ist nach MM 105 von Bolzano gestrichen worden. Weil aber im Beweis der Eindeutigkeit der Lotlinie in *Betrachtungen I* § 32 diese Folgerung benutzt wird und Bolzano keinen Ersatz dafür hat, übernehmen wir bei unserer Transformation der *Betrachtungen I* die Behauptung *Betrachtungen I* § 31 vorläufig als Voraussetzung:

U 4*: Zu jedem Punkt a außerhalb einer Geraden l und jedem Winkel α gibt es eine Gerade m durch a derart, daß $\angle$ (l, m) $= \alpha$.

Der Beweisgang in *Betrachtungen I* ist nun tatsächlich unrichtig, denn zuerst wird die Existenz und Eindeutigkeit der Geraden in *Betrachtungen I* § 32 unter Verwendung von *Betrachtungen I* § 31 (also U 4*) bewiesen, und dann wird die Eindeutigkeit der Linie in *Betrachtungen I* § 31 (d.h. die Eindeutigkeit der Linie m in U 4*) in *Betrachtungen I* § 39 unter Verwendung von *Betrachtungen I* § 31, § 32 bewiesen.

Nach MM 105 müssen die Sätze *Betrachtungen I* § 34 (Gleichheit aller rechten Winkel) und § 39 (Eindeutigkeit von m in U 4*) fortgelassen werden. Ferner sollen nach MM 105 die Sätze *Betrachtungen I* § 40 (conclusio in modo tollente des § 39), § 41–§ 45 stehen bleiben, während *Betrachtungen I* § 46 gestrichen werden soll. Bevor wir nun sehen, wie die Sache in *Betrachtungen I* liegt, nehmen wir den Satz *Betrachtungen I* § 39 als Voraussetzung statt der Voraussetzung U 4* hinzu, also

U 4: Zu jedem Punkt a außerhalb einer (orientierten) Geraden l und jedem Winkel α gibt es nur eine (orientierte) Gerade m durch a derart, daß $\angle$ (l, m) $= \alpha$.

Wir brauchen uns nun nicht mehr um die Sätze *Betrachtungen I* § 29 bis § 39 zu kümmern und auch nicht um die Conclusio in modo tollente der *Betrachtungen I* § 40, die mit U 4 gleichwertig ist. Wir sehen zugleich, daß wir nicht mehr annehmen als Bolzano in MM 105, wo er der Meinung ist, daß *Betrachtungen I* § 40 stehen bleiben kann.

Der Kongruenzsatz (WSW) in *Betrachtungen I* § 42, der die mathematische Formulierung des Bestimmungssatzes Betrachtungen I § 41 ist, wird mit *Betrachtungen I* § 39, d.h. mit U 4, gefolgert sowie der entsprechende Ähnlichkeitssatz *Betrachtungen I* § 43. Aus *Betrachtungen I* § 42, also mit U 4, ergibt sich dann der Satz *Betrachtungen I* § 44, daß in jedem Dreieck die Summe von zwei Seiten nie der dritten Seite gleich ist. Der Pythagoreische Lehrsatz *Betrachtungen I* § 45 wird unter Verwendung von V 3, U 3 und der Eindeutigkeit der Lotlinie, d.h. mit U 4 bewiesen, während der nach MM 105 zu streichende Bestimmungssatz *Betrachtungen I* § 46, also in unserer Übertragung der Kongruenzsatz (SSS), in *Betrachtungen I* § 47 aus dem Pythagoreischen Lehrsatz, also mit V 3, U 3, U 4, gefolgert wird.

Die Bearbeitung des restlichen Teils der *Betrachtungen I* nach derselben Methode bestätigt, daß die Voraussetzungen V 1–V 3 und U 1–U 4 zum Aufbau der Euklidischen Geometrie hinreichend sind: es sind keine weiteren Voraussetzungen notwendig. Selbstverständlich bedeutet das nicht, daß V 1–V 3 und U 1–U 4 eine vollständige Axiomatik der Euklidischen Geometrie darstellen.

Es zeigt sich ebenfalls, daß in den wesentlichen Sätzen alle bisher gefundenen Voraussetzungen gebraucht werden. Man beachte noch, daß die Annahme der wesentlichen Voraussetzung V 3 der Methode von Wallis ähnlich ist.

Nachdem wir also unsere Analyse der *Betrachtungen I* abgeschlossen haben, kehren wir zurück zu MM 105, wo Bolzano feststellt, daß der Satz *Betrachtungen I* § 34, von der Gleichheit aller rechten Winkel, wegfällt. Nach MM 105 stehen die Beweise der Sätze *Betrachtungen I* §§ 34, 39, 46 noch aus. Die Untersuchung der Beweismöglichkeiten des Satzes *Betrachtungen I* § 34 führt Bolzano auf die Notwendigkeit, die Begriffe Richtung, Seite, Ebene und besonders den Begriff der entgegengesetzten Richtungen zu erforschen. Die Untersuchung wird in MM 106 unterbrochen: dort fällt ihm ein Weg ein, den dem Kongruenzsatz (SSS) entsprechenden Bestimmungssatz *Betrachtungen I* § 46 ohne den Satz *Betrachtungen I* § 34 zu beweisen. Dazu braucht Bolzano aber einen Grundsatz, welcher im wesentlichen der oben erwähnten Peletierschen Erklärung der Winkelgleichheit entspricht. Der zu beweisende Satz soll demnach lauten: Die Entfernung zwischen zwei Punkten zweier Schenkel eines Winkels bestimmt alle derartigen Entfernungen (MM 106), was sich dann einfach mit dem Pythagoreischen Lehrsatz folgern läßt.

Anläßlich einer Neuformulierung der den Kongruenzsätzen entsprechenden Bestimmungssätze *Betrachtungen I* §§ 12, 41, 46 macht Bolzano in MM 107 die für ihn »frappante Entdeckung«, daß der Satz *Betrachtungen I* § 41: Eine Seite und die zwei ihr anliegenden Winkel bestimmen das Dreieck, eine »bloß algebraische Folgerung« sei. Die Ausarbeitung bleibt ohne wesentlichen Erfolg, aber in MM 193 wird die Frage in folgender Form erneut erörtert. Wenn bei gegebenem Winkel α bei a und Punkten b und c in den Schenkeln die Strecke bc bestimmt ist, dann ist bc $= f_\alpha$ (ac, ab) und ähnlich für den Winkel β bei b: ac $= f_\beta$(ba, bc). Wenn nun ab = c, bc = x und ac = y, dann hat man $x = f_\alpha(c, y)$ und $y = f_\beta(c, x)$, also $x = f_\alpha(c, f_\beta(c, x))$. Es ist aber nicht klar, was daraus hergeleitet werden kann. Bolzano vermutet, daß man, ohne auf den Satz *Betrachtungen I* § 41 Bezug zu nehmen, doch zeigen könnte, daß

$$f_\alpha(x, c) = (x^2 + c^2 - 2xc \cos \alpha)^{1/2},$$

korrigiert sich aber in dem Sinne, daß man den Lehrsatz von der Ähnlichkeit werde voraussetzen müssen. Also könne man die »frappante Entdekkung« am besten wieder vergessen, so naheliegend der Gedanke auch sei.

Die Versuche zur Elementargeometrie werden fortgesetzt mit dem Versuch zu beweisen, daß es in einem Punkt einer Ebene genau ein Lot auf sie gebe (MM 110), sowie mit etwas aus der Theorie der Parallellinien und des Winkelmaßes; sie werden vorläufig abgeschlossen mit einem neuen axiomatischen Aufbau der Geometrie (bis MM 115). Die weiteren Versuche, ein System der Geometrie aufzubauen, sind zu Beginn dieser Einleitung schon erwähnt worden.

Im allgemeinen Rahmen der Grundlegung der Elementargeometrie und der allgemeinen Mathematik wird in MM 132–135 die Untersuchung von Gleichheit und Ähnlichkeit in Fortsetzung von MM 103 (BGA 2 B 2/1, S. 174) wieder aufgenommen. So versucht Bolzano z. B. erneut zu beweisen, daß die Entfernung ab der Entfernung ba gleich ist. Der in *Beyträge* § 11 abgedruckte Beweis dieser Behauptung ist nach Bolzano unbefriedigend. Eine ähnliche Schwierigkeit bietet auch der Gleichheitsbegriff für Winkel, beim Beweis nämlich, daß der Winkel bac dem Winkel cab gleich ist. Nunmehr sucht Bolzano die Schwierigkeiten durch Abänderung der Definitionen von Entfernung und Winkel in MM 139 bzw. 141 zu beheben. Diese Versuche bleiben aber ohne nennenswerten Erfolg.

In den Jahren 1809 und 1810 studiert Bolzano ausführlich Kästners *Geschichte der Mathematik* und ergänzt dessen Bemerkungen zu den Euklidbearbeitern wie Peletier, Dasypodius, Nassir-Eddin, Ramus, Geminus und vielen anderen. Von den Notizen zu zeitgenössischen Autoren sei hier auf die ausführliche Analyse in MM 158–160 von Hindenburgs – in dessen *Neues System der Parallellinien* – fehlerhaftem Beweis des Satzes, daß zwei Geraden, die einer dritten parallel sind, auch untereinander parallel sind, hingewiesen. Schweikarts *Theorie der Parallellinien* wird ebenfalls ausführlich studiert und kommentiert. Man kann also sagen, daß Bolzano in diesen Jahren fast alle Arbeiten über Parallellinien kennengelernt hat, wenn nicht aus erster, dann jedenfalls aus zweiter Hand.

Die Theorie der Gleichheit und Ähnlichkeit von Dreiecken ist in MM 171 erneut Gegenstand der Untersuchung als Vorbereitung zur »philosophischen« Zerlegung des Beweises, daß es nur ein Lot gebe (MM 172). Der Beweis in *Betrachtungen* wird nicht wesentlich verbessert, und so ist das Bolzanosche System der Geometrie noch immer unvollständig.

In der räumlichen Geometrie hat man dieselben Fragen bezüglich der Lotlinien auf einer Ebene wie in der ebenen Geometrie: erstens die der eindeutigen Existenz eines Lots in einem Punkt der Ebene, zweitens die der eindeutigen Existenz der Lotlinie aus einem Punkt außerhalb der Ebene. Für Bolzano ist die Eindeutigkeit die schwerste Aufgabe, und er versucht in MM 173, aus der Existenz von zwei Loten durch einen Punkt einer Ebene die Existenz einer dritten Linie senkrecht auf zwei gegebene senkrechte Linien durch einen Punkt, die Bestimmung eines jeden Punkts des Raumes herbeizuführen, während das bei vier unter sich senkrechten Linien für keinen Punkt möglich sei und umsomehr nicht bei unendlich vielen. Eine Behauptung wie die letztere kann man nur aufstellen, wenn man von vornherein davon überzeugt ist, daß es nur drei senkrechte Linien gibt, davon also, daß der Raum dreidimensional ist. Tatsächlich sollten diese Bemerkungen von Bolzano dem Zweck dienen zu zeigen, daß der Raum notwendigerweise dreidimensional ist; man vgl. dazu MM 173, Z. 3 »Ich fahre also fort absurda zu sammeln«.

Schließlich gibt es noch einige erwähnenswerte vermischte Aufzeichnungen zum Bereich der Elementarmathematik.

MM 140 bietet zwei Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes, die von dem in *Betrachtungen I* § 45 völlig verschieden sind. Dieser ist wahrscheinlich von Bolzano selbst erfunden worden, während jene damals vielleicht schon bekannt waren. Die Sache ist aber noch nicht geklärt.

Der erste Beweis in MM 140 wird von den Geschichtsschreibern des Pythagoreischen Lehrsatzes im allgemeinen Hauff zugeschrieben (J.K.F.

Hauff: *Lehrbegriff der reinen Mathematik*, Frankfurt am Main, 1803). Diese Behauptung ist aber fragwürdig, denn der Beweis in Hauff § 178 (Fig. 82) ist der Euklidische Beweis und verschieden von Bolzanos erstem Beweis. Hauff gibt noch einen zweiten Beweis (Fig. 83), der von gleicher Einfachheit und dem zweiten Beweis von Bolzano ähnlich ist. Doch ist auch der zweite Hauffsche Beweis verschieden von Bolzanos beiden Beweisen. Der zweite Bolzanosche Beweis wird Jacob Gelder (1810) zugeschrieben. Das bedarf aber bestimmt der Berichtigung, denn die diesbezügliche Aufzeichnung Bolzanos stammt aus dem Jahre 1808. Damit soll aber nicht gesagt sein, daß der Beweis Bolzano zugeschrieben werden muß. In diesem Zusammenhang sei auf die große Sammlung von Beweisen des Pythagoreischen Lehrsatzes in E. H. Loomis: *The Pythagorean Proposition* (2nd edition), Washington 1968, hingewiesen. Etwas einfacher noch als der von Bolzano erwähnte Beweis ist der laut al-Nayrîzî von Thâbit ben Kourrah entwickelte.

In gewisser Hinsicht andersartig ist die Notiz »Uiber Figuren, die sich mit einem Zuge ziehen lassen ohne denselben Weg zweymahl zu beschreiben« in MM 108. Bolzano meint, daß, auch wenn mehr als zwei Punkte vorkommen, in denen eine ungerade Anzahl von Linien zusammenstößt, es möglich ist, die Figur in einem Zuge zu ziehen. L. Euler aber hatte schon 1736 in der bekannten Abhandlung: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8 (1736), 128–140), die Unmöglichkeit für diesen Fall gezeigt. Bolzano war wohl nicht richtig informiert und hat sich die Sache wahrscheinlich nicht einmal überlegt. Er hat vielleicht nur abgeschrieben.

Bemerkenswert ist dann noch die in MM 178 erörterte Schwierigkeit, die daraus entsteht, daß man die Strecke ab als den Inbegriff aller Punkte zwischen a und b definiert. Wenn b zwischen a und c liegt, kann man unmöglich behaupten, daß ac = ab + bc, denn der Inbegriff ac enthält b, während b in ab + bc nicht enthalten ist. Wenn man die Endpunkte einer Strecke zum Inbegriff rechnet, kann man ebenfalls nicht schreiben ac = ab + bc, denn ab + bc enthält nach Bolzano den Punkt b zweimal. Betrachtet man nur die Anzahl der Punkte eines Inbegriffs, ließe sich die Gleichung wenigstens in dem Sinne rechtfertigen, daß b gegen die unendliche Anzahl der Punkte in ab, bc, ac verschwindet. Bolzano schlägt vor, die Strecke nicht als Summe ihrer Punkte zu betrachten und sie als ein räumliches Gebilde aufzufassen. Es sollten dann keine Gleichungen wie ac = ab + bc zwischen den Strecken bestehen. Die Addition hat in diesem Fall keine Bedeutung bzw. nur die einer »eigentlichen Addition«, d.h. einer Juxtaposition; wie bei Pferd und Reiter; ab + bc wäre also in keinem Sinne eine Strecke. In MM 207 wird die Frage näher betrachtet und die Definition der Strecke als Inbegriff, d.h. als Summe von Punkten, wird abgelehnt. Es besteht zwar die obengenannte Gleichung für die Längen der Strecken, nicht aber für die Strecken selber.

Bolzano meint in MM 178, daß *die Summe der Punkte* (nur) *die Länge der Strecke zu erkennen gibt.* Zwei Strecken verschiedener Länge haben also eine verschiedene Anzahl von Punkten. Weil die Anzahl der Punkte einer Strecke unendlich ist, gibt es verschiedene Verhältnisse zwischen den unendlichen Zahlen. Ausgehend von der soeben genannten Überzeugung (MM 178) hat Bolzano im Laufe der Zeit seine Rechnung des Unendlichen entwickelt, die in *Paradoxien des Unendlichen* § 29, § 41, § 42, § 49 zusammenfassend dargestellt ist.

Wie im ersten Heft ist die *Größenlehre* auch im zweiten Heft der MM mehrmals Gegenstand von Untersuchungen grundlegender Art. Es handelt sich sowohl um eine allgemeine Erklärung des Größenbegriffs und um Operationen wie Addition, Multiplikation und Entgegensetzung vom philosophischen Blickpunkt aus als auch um grundlegende Eigenschaften von Funktionen und Funktionen von Funktionen (Funktionalen). Wie schon in der Einleitung zu BGA 2 B 2/1, S.13f. erwähnt, hat die Frage der Rektifikation der Kurven (MM 53–56) und die mechanisch-ätiologische Untersuchung des Verhältnisses von Ursache und Wirkung (MM 73–79) Bolzano veranlaßt, das diesen Erscheinungen zugrundeliegende mathematische Gesetz zu ermitteln. Diesen Satz meint Bolzano in MM 78 gefunden zu haben, und er wird dort im wesentlichen folgendermaßen formuliert: Sind y (x) und z (x) zwei stetige Funktionen und werden Y (x) und Z (x) aus x und y bzw. x und z nach einem gemeinschaftlichen Gesetz bestimmt, also Y (x) = F (x, y (x)) und Z (x) = F (x, z (x)), so strebt der Quotient von Y (a + i) – Y (a) und Z (a + i) – Z (a) dem Quotienten von y (a) und z (a) zu, wenn i gegen Null strebt. In MM 135 bemerkt Bolzano, daß der Satz in MM 78 unrichtig bewiesen wurde, während seine Anwendung zu mechanischen Zwecken fragwürdig ist, weil man dann implizit voraussetzt, daß die Wirkung stetig ist, wenn die Ursache stetig ist.

Diese Bemerkung Bolzanos ist nicht ganz zutreffend, weil aus der Stetigkeit von y nicht einmal die Stetigkeit von Y folgt. Selbstverständlich ist die Anwendungsmöglichkeit nicht das Kriterium für die Richtigkeit des Satzes, aber für Bolzano ist eben das (vermeintliche) Verhalten von Ursache und Wirkung der Grund für die Wahrheit dieses Satzes, wie viele Zweifel hinsichtlich des Beweises auch bestehen. Schon in MM 79 heißt es: »Zum wenigsten sieht man, daß der Satz wahr ist, wenn man auch mit diesem Beweise nicht ganz zufrieden seyn sollte.« Der Satz ist aber falsch, sogar in dem einfachen Fall, wo $Y(x) = F(y(x))$ und F eine differenzierbare Funktion ist.

Noch immer überzeugt von der Wahrheit seines Satzes versucht Bolzano in MM 136 einen neuen Beweis zu liefern und schlägt vor, folgendermaßen zu verfahren: Um die Wirkung $F(f)$ aus der Ursache f abzuleiten, braucht man die Werte von f in einem Intervall $t, t + \theta$, deren Anzahl unendlich ist. Er versucht darum den Satz herzuleiten, daß eine Funktion von unendlich vielen Veränderlichen stetig ist. Auch dieser Satz ist falsch, und die Versuche Bolzanos laufen auf Nichts hinaus. In MM 137 meint er dann, einen ganz kurzen Weg gefunden zu haben: Er beabsichtigt dort zu zeigen, daß, wenn für zwei stetige Funktionen $y(a) = z(a)$ gilt, $y(x+i) = z(x+i) + \theta . z(x+i)$ ist, wobei θ mit i gegen Null strebt.

Endlich muß er nach Anführung eines Gegenbeispiels in MM 139 gestehen, daß der Satz nicht wahr ist: »Also ist es nicht wahr: was hier geschwätzt wird von Ableitung nach einerlei Gesetz ...«. Überzeugt aber von der Richtigkeit unter irgendwelchen einschränkenden Bedingungen, behauptet er, daß alles wohl nur von nächsten Folgen und einfachsten Gründen gilt. Wie Bolzano das Verhalten vom nächsten und einfachsten Grund zu seiner Folge gerne sieht, erhellt aus dem Satz (ohne Beweis) MM 139: Wenn die stetige Funktion y der nächste und einfachste Grund von Y sein soll, so muß $Y' = y$ sein. Und für diesen Fall gilt der ursprüngliche Satz tatsächlich.

Die Frage wird im zweiten Heft nicht mehr erörtert und es gibt dort überhaupt keine Stellen mehr, wo von grundlegenden Fragen der Stetigkeit die Rede ist.

Die Aufzeichnungen über die Grundlegung der Größenlehre erfolgen im Rahmen des von Bolzano 1809 (MM 140) gefaßten Entschlusses das ganze Gebiet der reinen Mathematik zu revidieren und in einzelnen Abhandlungen herauszugeben. Bekanntschaft mit Wolfs *Ontologia* und Lamberts *Architectonic* kann dabei vorausgesetzt werden. Eine inhaltliche Einteilung erfolgt schon in MM 145, wo bereits angegeben ist, was erörtert werden soll, z.B. die Erklärung eines Ganzen, die zwei Weisen der Zusammensetzung der Teile: Addition und Multiplikation, und die Erklärung des Begriffs der Größe, wie es auch in MM 142 schon sehr allgemein heißt »eine Eigenschaft, welche durch eine Zahl bestimmt werden kann«. Ferner soll insbesondere der Verhältnisbegriff erklärt werden und zwar in sehr allgemeiner Weise, wie dies z.B. aus dem Ansatz in MM 142 hervorgeht, wo jedes einzelne äußere Merkmal ein Verhältnisbegriff heißt.

Bolzanos Betrachtungen dieser Gegenstände ergeben sich zu einem erheblichen Teil anläßlich Michelsens *Gedanken* (ab MM 149) und *Beiträgen* (MM 153–158), von Spauns *Versuch* (MM 160–163) und E. G. Fischers *Uibersicht* (MM 163–170); sie werden zum Teil in Bolzanos *Beyträgen* verwertet.

Bolzano dringt noch nicht tief in diese Materie ein, wie z.B. MM 176 zeigt, wo er folgenden Satz als Hauptlehrsatz der Lehre von den entgegengesetzten Größen betrachtet: »Wenn eine veränderliche Größe M von x, y abhängt und es verändert sich eine der Größen x, y in ihre entgegengesetzte, so wird der Wert von M gefunden wenn man das Zeichen von x in der Formel für M in das entgegengesetzte verwandelt«. Es soll nach Bolzano dann auch die Definition der Entgegensetzung so einzurichten sein, daß dieser Satz herleitbar ist und er beginnt tatsächlich, Einzelfälle des Lehrsatzes zu beweisen.

Die Aufzeichnungen zur *Mechanik* beginnen in MM 114 und sind der Zusammensetzung der Kräfte, der Theorie vom Hebel, der Existenz der Repulsionskräfte (MM 121) und der Theorie des Gleichgewichts gewidmet.

Bei der Zusammensetzung der Kräfte wird die bekannte de Foncenexsche Funktionalgleichung

$$F(\alpha)^2 = F(2\alpha) + 2$$

hergeleitet, deren Lösung nach Bolzano den Mechaniker nichts mehr angeht und Sache der Mathematik ist. Die analytischen Lösungen dieser Gleichung waren damals schon von d'Alembert und Laplace bestimmt worden; darunter befindet sich zwar die von Bolzano angestrebte Lösung $2\cos\alpha$, doch ebenfalls z.B. $2\cosh\alpha$. Das ist eben nicht ohne Bedeutung, wenn man beachtet, wie die Zusammensetzung der Kräfte mit der Theorie des Hebels und also mittelbar mit dem Parallelenpostulat zusammenhängt. Eine kurze und klare Darstellung dieses Zusammenhangs findet sich in R. Bonolas bekannter Arbeit *Die nichteuklidische Geometrie* (Deutsch von H. Liebmann, Leipzig 1908), die in der englischen Übersetzung von H.S. Carslaw: *Non-euclidean Geometry, a Critical and Historical Study of its Developments by Roberto Bonola*, (Dover Publ. Inc.), New York 1955, leicht zugänglich ist; insbesondere Appendix I, S. 181–199.

Die Zusammensetzung zweier unter einem rechten Winkel wirkender Kräfte führt Bolzano auf die Funktionalgleichung

$$f(x) \,.\, f\left(\tfrac{1}{x}\right) = 1,$$

die auch schon beim Hebel in MM 63 auftritt, zurück (BGA 2 B 2/1, S.115).

Für diese Gleichung leitet Bolzano in MM 117–118 die Lösung $f(x) = \pm x^{\alpha}$ her und versucht sodann zu beweisen, daß α gleich 1 ist. Er erkennt, daß $\alpha = 1$ nicht aus der Gleichung gefolgert werden kann und daß also noch eine mechanische Bedingung notwendig ist. Es ist aber nicht klar, welche Bedingung das sein soll.

In MM 115 sucht Bolzano einen Spezialfall zu lösen, der sich ergibt, wenn man davon ausgeht, daß bei der Zusammensetzung der Kräfte (x_i, y_i, z_i) gelten soll, daß $\Sigma x_i = 0$, $\Sigma y_i = 0$, $\Sigma z_i = 0$. Die Gleichung $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$ erhält dann die Form $\Sigma x_i \cdot \Sigma \frac{1}{x_i} = 1$, wobei die Summe sich über n Glieder erstreckt. Bolzano behauptet in MM 116, daß es nur Lösungen gibt, wenn n ungerade ist, und dann auch nur eine einzige reelle Lösung (abgesehen von einer Permutation der x_i).

Zu dieser Behauptung müssen wir Folgendes bemerken. Wenn eine homogene Funktion $f(x)$, d.h. eine Funktion, für die gilt $f(\alpha x) = \alpha^k f(x)$ für ein bestimmtes k und alle $\alpha \neq 0$, Lösung der Gleichung $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$ ist, so ist auch $f(\alpha x)$ eine Lösung. Man kann sich bei der Lösung des Spezialfalls $\Sigma x_i \cdot \Sigma \frac{1}{x_i} = 1$ also auf den Fall $\Sigma x_i = 1$ beschränken, und man sieht leicht, daß für $n > 3$ im System der n Wurzeln einer Gleichung $x^n - x^{n-1} + \ldots - \beta x + \beta = 0$ eine Lösung besteht. Es gibt also für $n > 3$ eine unendliche Menge von nichtproportionalen Lösungen, für $n = 3$ eine endliche Menge solcher Lösungen, während für $n = 2$ keine reelle Lösung existiert und für $n = 1$ alle reellen Zahlen ungleich Null Lösungen sind (nämlich $x = 1$ und alle Vielfache ungleich Null). In diesem Zusammenhang kommt Bolzano in MM 119 auf die Gleichung $f(x) = f(\frac{1}{x})$ zu sprechen und er findet die Lösungen

$$f(x) = \ldots + Bx^b + Ax^a + A_0 + Ax^{-a} + Bx^{-b} + \ldots,$$

wobei a, b positiv sind. Er kann daraus jedoch keine Lösungen der $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$ herleiten (MM 120). Dies veranlaßt uns zu folgender Bemerkung: Wenn man in der Gleichung $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$ setzt $\Phi = x \cdot f' \cdot f^{-1}$, dann erfüllt Φ die Gleichung $\Phi(x) = \Phi(\frac{1}{x})$. Jede Lösung Φ von $\Phi(x) = \Phi(\frac{1}{x})$ ergibt also eine Lösung $f = c \cdot \exp(\int \frac{\Phi}{x}\, dx)$ der Gleichung $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$.

Die allgemeine Form der Lösung Φ ist $\Phi(x) = g(x) + g(\frac{1}{x})$. Wählt man z.B. $\Phi = x + \frac{1}{x}$, so erhält man $f = \exp(x - \frac{1}{x})$ als Lösung der Gleichung $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$.

Wenn man also bedenkt, daß die Gleichung $\Phi(x) = \Phi(\frac{1}{x})$ unendlich viele Lösungen hat, sieht man, daß auch die Gleichung $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$ unendlich viele von der trivialen Lösung 1 verschiedene Lösungen hat. Also kann die Gleichung dem von Bolzano gesetzten Ziel nicht dienlich sein, weder in der Theorie der Zusammensetzung der Kräfte noch in der Theorie vom Hebel.

Was das Gleichgewicht eines Systems mehrerer Kräfte an mehreren Punkten betrifft, sucht Bolzano, unter Hinzusetzen mechanischer Bedingungen, in MM 93, 94 noch immer, den grundlegenden geometrischen Satz zu finden. Da er keine Ahnung hat, welche Bedingungen hinzuzusetzen sind, studiert er Lagranges *Théorie des fonctions analytiques*. Das führt ihn zum d'Alembertschen Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, das er in philosophischem Übermut aus irgendeinem ätiologischen Grundsatz zu beweisen sucht (MM 128, 130). Auf ein derartiges Unternehmen war Bolzano damals aber in keiner Hinsicht richtig vorbereitet, was man aus seiner Frage in MM 128 ersehen kann, was das Produkt von Kraft und Geschwindigkeit eigentlich ausdrückt. Jeder zeitgenössische »Mechaniker« würde ihm auf diese Frage antworten: die Ursache der lebendigen Kraft – wenn nur dieser Mechaniker die Bolzanosche Sprache spräche – denn es ist $dA = Kds = Kvdt = mv\frac{dv}{dt}dt = mvdv = d(\frac{1}{2}mv^2) = dE$, also ist $Kv = \frac{dE}{dt}$.

Ebenso einleuchtend ist die Bemerkung Bolzanos in MM 127, wo er meint: die Größe der Bewegung (mv) sei eigentlich die Größe der Kraft und es sollte eigentlich heißen: $K = mv$ (statt des Newtonschen $K = ma$). Bolzano wirft in MM 124 Lagrange vor, daß er den Satz von den virtuellen Geschwindigkeiten unbewiesen voraussetzt, doch scheint er das Prinzip nicht recht verstanden zu haben. Ein Hinweis darauf ist die Bemerkung zu seinem eigenen Beweisversuch in MM 128: »Wenn ich das Einmahl nicht recht verstehen sollte, nicht sehr zu wundern: denn ich verstehe es schon jetzt nicht recht.«

Wenn Bolzano sich die Bedeutung des Worts »Moment« überlegt, faßt er in MM 129 den Entschluß einen neuen ätiologischen Begriff einzuführen; »Die Ursache weshalb sich ein gewisses materielles System bewegt, heißt das mechanische Moment dieses Systems«, und er skizziert, wie eine Abhandlung darüber aussehen müßte.

Schließlich sei noch erwähnt, daß Bolzano in MM 197 vergebens versucht, die sich bei der Zusammensetzung n gleicher Kräfte nach einer Richtung ergebende Funktionalgleichung $f(2)\,f(n) = f(2n)$ zu lösen.

In den Untersuchungen über die Grundbegriffe in den verschiedenen Zweigen der Mechanik, Geometrie, Größenlehre usw. stößt Bolzano als Philosoph wiederholt auf Fragen, die nach ihm bald zur *Methodenlehre*, bald zur *Ätiologie* gehören. Es gibt darunter Sätze, die wir heute zur Mathematik schlechthin rechnen würden, wie z. B. der oben erwähnte Satz MM 138 über die Stetigkeit der Funktionen mehrerer Veränderlichen und der Satz MM 172a, daß jede Funktion als Potenzreihe darstellbar ist. Absichtlich allgemeiner als für die Mathematik nützlich ist, versucht er in philosophischer Hinsicht die Begriffe des Merkmals (MM 134), des Verhältnisses (MM 142), des Gesamtverhältnisses (MM 143), der Richtung u. s. w. zu bestimmen.

Besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang das Studium von Michelsens *Gedanken* und *Beiträgen* (MM 149–158), die er auch bei der Abfassung seiner eigenen *Beyträge* (1810) ausführlich verwendet hat. Dabei stößt er auf Kants Unterscheidung der logischen und realen Opposition (MM 151) und auf die Behauptung, daß es sich bei den entgegengesetzten Größen um eine Realopposition bzw. Realrepugnanz handelt. Übrigens erinnert Bolzano auch daran, daß er das selber vor mehr als einem Jahr bemerkt habe. Jedenfalls drückt Kant sich etwas klarer aus. Nach Kant findet die Realrepugnanz nur statt, »insofern zwei Dinge als positive Gründe Eines die Folge des Anderen aufhebt«. Hinreichend eingeschränkt kann das soviel bedeuten, wie daß es sich um inverse Operationen bzw. inverse Funktionen handelt. Ebenfalls durch Michelsens *Beiträge* kommt Bolzano in MM 153 wieder auf Kants Erklärung der Mathematik als Vernunftswissenschaft aus Konstruktion der Begriffe. Unter Einfluß von Kant und einer Besprechung in der *Leipziger Literatur-Zeitung* (1808) entscheidet Bolzano sich in seinen *Beyträgen* für die folgende Auffassung: Die Mathematik ist die Wissenschaft, die von den allgemeinen Gesetzen (Formen) handelt, nach welchen sich die Dinge in ihrem Dasein richten müssen (*Beyträge I*, S. 17; vgl. auch z. B. MM 145, MM 154). Indem er die herkömmliche Erklärung, die Mathematik sei Größenlehre, in MM 154 ablehnt, entwickelt Bolzano eine neue Einteilung der Mathematik, die sich auf die Auffassung, die Mathematik sei Wissenschaft der sinnlichen Formen, gründet.

Zum Schluß dieser Einleitung sollten unbedingt noch einige interessante Aufzeichnungen über kontinuierliche Linien erörtert werden. Da ist zuerst in MM 186 folgender Satz: Wenn $y = fx$ und $z = \varphi x$ stetige Funktionen sind, so stellen sie eine kontinuierliche Linie vor, d. h. nach der üblichen geometrischen Erklärung (MM 4) eine Linie, bei der es zu jedem ihrer Punkte keinen nächsten gibt, während es zu jeder gegebenen Entfernung nur eine endliche Anzahl ihrer Punkte gibt. Die erste Behauptung wird mittels des auf die Abstandsfunktion angewandten Mittelwertsatzes bewiesen und benutzt die Differenzierbarkeit der Funktionen f und φ. Hieraus ersieht man, daß Bolzano Ende 1810 den Unterschied zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit noch nicht kannte. Der Beweis der zweiten Behauptung verwendet die nicht bestehende endliche Lösbarkeit der Abstandsformel.

Inzwischen bemerkt Bolzano im Laufe des mit obigem Satz wieder aufgenommenen Studiums der kontinuierlichen Linien in MM 193, daß die Erklärung in MM 4 nicht richtig ist, da auch nicht zusammenhängende Linien dieser Defininition genügen. Er versucht aber nicht, die Definition in dieser Hinsicht zu verbessern. Stattdessen stellt er wenige Seiten weiter (MM 208) folgende Spezialform des Leibnizschen Satzes (G.W.Leibniz: *Mathematische Schriften*, ed. C.I.Gerhardt, VII 284ff., Berlin, Halle 1849–1863) auf: Wenn in einer Ebene der Punkt a innerhalb und b außerhalb einer kontinuierlichen in sich selbst zurückkehrenden Linie L der Ebene ist, so wird jede kontinuierliche Linie der Ebene, welche a und b verbindet, die Linie L zwischen a und b schneiden. Nach einem schwachen Beweisversuch wird das Problem etwas vereinfacht, indem für die Linie ein Dreieck gewählt und die Aufgabe formuliert wird, daß jeder Punkt o auf der Strecke mn auch innerhalb des Dreiecks abc liegt, in dessen Seiten m und n liegen. Eine Behauptung, die er als schwer beweisbar betrachtet, denn – sagt Bolzano – die letztere Behauptung ist gleichbedeutend damit, daß jede kontinuierliche Linie aus o ins Unendliche eine der Seiten des Dreiecks schneide. Er setzt sich daran, die Aufgabe in dieser gleichbedeutenden Form zu lösen. Ein algebraischer Beweisansatz scheitert, doch dann folgt nach einem Eureka ein interessanter Beweis, der zwar unvollständig, doch methodisch als neuartig zu bezeichnen ist.

Die Hauptmomente des Beweises sind

1. Genau dann, wenn o zwischen mn liegt, schneidet jede Halbgerade aus o eine der Seiten des Dreiecks.

2. Wenn nun aus 0 eine kontinuierliche Linie L ins Unendliche gezogen ist und man den Punkt r von o aus die Linie L durchlaufen läßt, ergeben die geraden Linien or jeweils einen Schnittpunkt s mit dem Dreieck. Sei or = y und os = z, so ändern y und z sich stetig (noch zu beweisen). In der Nähe von o ist $y < z$ und weil or ins Unendliche wächst und os nicht, gibt es auch Punkte der L wo $y > z$. Also gibt es auch einen Punkt r derart, daß $y = z$, d.h. $r = s$, also schneidet L das Dreieck.

Es ist klar, daß – auch nach Bolzano – der Beweis unvollständig ist. Der Satz 1. der in 2. verwendet wird läßt sich nicht so einfach beweisen, wie Bolzano meint. Die Stetigkeit der y und z hängen mit der Erklärung der kontinuierlichen Linie zusammen und ist nicht schwer zu beweisen, wenn man z.B. von der Definition in MM 186 ausgeht. Die Existenz des Schnittpunktes wird gefolgert aufgrund des damaligen naiven Begriffs der Stetigkeit: »eine Größe verändere sich von a bis b stätig heißt, sie geht alle Größen durch, die zwischen a und b liegen« (MM 210). Es handelt sich hier aber um eine stetige Funktion, und die Behauptung ist eben der Inhalt des späteren, nicht trivialen Satzes Bolzanos aus dem Jahre 1817.

Der Satz ist als eine interessante Stufe im Bolzanoschen Programm zu betrachten, die Begriffe innerhalb, außerhalb, Seite usw. zu klären, womit auch die Begriffe zwischen und Richtung zusammenhängen, also im Problemkreis der linearen und ebenen Anordnung. Der Satz ist ein weiteres Zeugnis davon, wie Bolzano sich allmählich zu den grundlegenden Fragen der Geometrie und Analysis durchbeißt.

B. van Rootselaar

Uib[e]*r d*[ie] *Mögl*[*i*]*chk*[*ei*]*t entg*[e]*g*[enge]*s*[e]*tzt*[e]*r R*[*i*]*cht*[un]*g*[en][a]. ‖

L[e]*hrs.*[atz] W[enn] 2 P[*un*]cte m, n in e[*ine*]rl.[*ei*] R.[*ichtung*] zu a lieg.[en]

so s[in]d d[ie] R[*i*]cht[*un*]g[en] bey m, n v.[on] d[e]r | Art, d[a]ß Ein[e] d[urc]h d[ie] and[e]r[e] b[e]st[imm]t w[ir]d; also ent-w.[eder] *Ein*[e]*rley* (E) od[e]r | – wof.[ern] es entg:[egengesetzte] R.[*ichtungen*] gibt *entg*[e]*g*[enge]*s*[e]*tzt* (O.) |

L[e]*hrs.*[atz] In ein.[em] Syst[e]me v.[on] 3 P[*un*]ct[e]n a, b, c, dav.[on] 2 zu d[e]m 3t[en] in solch[en] R:[*ichtungen*] lieg[en], | dav.[on] d[ie] E[*in*]e d[urc]h d[ie] And[e]re b[e]st[imm]t wird (E od[e]r O), ist eb[e]n dieß auch b.[*ei*] ‖ d[en] 2 and[e]r[e]n P[*un*]ct[en] d[e]r Fall. – |

Zus.[atz] Da es d[e]r P[*un*]cte *drey*, u.[nd] d[e]r *mögl*[*ichen*] *V*[e]*rh*[*ä*]*lt*[*ni*]*sse* u[n]t[e]r d[en] R[*i*]cht[*un*]g[en] an ihn[en] [nu]r höchst[en]s | *zwey* (E o[der] O, w[enn] ja O mögl[*i*]ch ist) gibt; so [mu]ß w[e]n[*i*]gst[en]s b.[*ei*] 2 d[*ie*]s[e]r P[*un*]cte ein *gl*[*ei*]*ch*[e]*s* | V[e]rh[*ä*]lt[*ni*]ß statt find[en]. Es sey[en] diese P[*un*]c-te a, b. |

Zus.[atz] Weil also das V[e]rh[*ä*]lt[*ni*]ß d[e]r R.[*ichtungen*] an d[en] 2 P[*un*]c-t[en] a, b *gl*[*ei*]*ch* ist, so b[e]haupte ich, es ‖ [mü]sse ei[n]e solche Lage des P[*un*]ctes c mögl[*i*]ch seyn, dab.[*ei*] auch d[ie] *Entf*[e]*r*[*nun*]*g*[en] | ac, bc gl[*ei*]ch wär[en], so d[a]ß das Syst[e]m acb = bca wäre. *Denn* | das Syst[e]m acb hat d[ie] Entf.[ern*ung*] ab, das R[*i*]cht[*un*]gen V[e]rh[*ä*]lt[*ni*]ß bac, u.[nd] d[ie] Entf[e]*r*-[*nun*]g | ac; das Syst.[em] bca hat d[ie] Entf.[ern*ung*] ba = ab, das R[*i*]cht[*un*]-g[en]v[e]rh[*ä*]lt[*ni*]ß abc = bac, u.[nd] d[ie] Entf.[ern*ung*] | bc. Die erst[e]n 2 Stücke s[in]d also *gl*[*ei*]*ch*, waru[m] sollte es [ni]cht auch das *l*[e]*tzte* seyn ‖ 105
könn[en]? W[enn] dieß [ni]cht e[inma]hl *mögl*[*i*]*ch* s.[*ein*] sollte, so [mü]ßte d[e]r G[run]d | dies[e]r Unm[*ö*]gl[*i*]chk[*ei*]t in d[en] vorh[e]rg:[ehenden] St[*üc*]k[en] lieg[en], d[*ie*]se s[in]d ab[e]r *gl*[*ei*]*ch*. Ergo. – |

(Zwey *v*[e]*rsch*:[*iedene*] P[*un*]cte c fr[*ei*]l[*i*]ch; ab[e]r Ein u[nd] d[e]rs[e]l-be! – |[b]

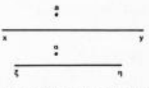
Zus.[atz] Ang[e]nom̄[men] also c habe e[*in*]e solche Lage, d[a]ß ac = bc. so f[o]lgt, ‖ d[a]ß d[ie] R:[*ichtungen*] ca, cb [nic]ht *e*[*ine*]*rl*[*ei*] seyn kö[nnen], also s[*in*]d sie O. Also | gibt es *O. R*[*i*]*cht*[*un*]*g*[en]. |

In d[e]*r Abh.*[andl*ung*] ist §. 30.[1] *d*[a]*ß a,xy* ~ α,ξη auf e[*in*]e unb[e]fr[*ie*]d[*i*]-

[a] **Textanfang MM 104, Z. 29.**

[b] **Ab MM 104, Z. 39 bis hier gestrichen.**

[1] ***Betrachtungen I*, § 30 lautet: »Jedes System einer zu beyden Seiten ins Unbestimmte**



g[en]de Art er-|wies[en]. Das, was z[u]nächst in §. 32[2] d[a]r[*au*]s g[e]f[o]lg[e]rt w[ir]d, *d*[a]*ß* | *es aus 1 P*[*un*]*cte* [nu]r 1 P[e]rp.[end*iku*]l[a]rl[*i*]n[*i*]e g[e]be, f[e]rn[e]r, d[a]ß es auch ‖ 2., *schiefe Li*[*nie*]*n* a.[*us*] 1 P[*un*]cte gebe, ab[e]r j[e]d[e]rz[*ei*]t n[u]r *2*; d[ie] *gl*[*ei*]*che* W[*in*]k[e]l bild[en], | kann unabh.[*ängig*] v[on] §. 30 b[e]wies[en] w[e]rd[en], wie ich es in mein[en] *Bög*[en] *f*.[*ür*] *Gr*[a]*f*[en][3] | Clam g[e]than habe. – Allein d[e]r B[e]w[*ei*]s v.[on] §. 34[4], d[a]ß *alle R*[e]*cht*[en] *W*[*in*]*k*[e]*l gl*[*ei*]*ch* | *s*[in]*d fällt weg*. Item §. 39. – Steh[e]n bl[*ei*]bt. §. 40. §. 41. it[em] §. 42. 43. näh[m]l[*i*]ch | d[e]r Satz, d[a]ß *2 W*[*in*]*k*[e]*l* u[nd] 1 S.[*ei*te] ein Δ b[e]st[immen]; imgl[*ei*]ch[en] §. 44. d[a]ß 2 S.[*ei*ten] nie d[e]r ‖ 3t[en] gl[*ei*]ch se[*in*] kö[nnen], wie auch §. 45, d[a]ß im *r*[e]*chtw*.[*in*kel*i*-gen] Δ, u[nd] [nu]r in *d*[*ie*]*s*[e]*m*, hyp^2 = cat.^{2} + cat.^{2} | – Allein §. 46. "*3 S*.[*ei*ten] *b*[e]*st*[*immen*] *das* Δ„ *fällt weg*. |

Ich will [nun] v[e]rsuch[en], wie sich *weit*[e]*r bauen* z.B. *wie sich viell*[*ei*]*cht d*[e]*r Satz: d*[a]*ß alle R*[echten] *W*[*in*kel] | *ei*[n]*and*[e]*r gl*[*ei*]*ch s*[in]*d*, *b*[e]*w*[*ei*]*s*[en] *lasse*. |

verlängerten geraden Linie und eines außerhalb ihrer befindlichen Punctes ist jedem andern solchen Systeme gleich: o, xy $\sim \omega, \xi\eta$«.

Bemerkung des Herausgebers J. Vojtech in *Oeuvres de Bernard Bolzano*, T. 5, Prague, 1948: Hier liegt offenbar ein Druckfehler vor. Statt gleich soll ähnlich stehen.

[2] *Betrachtungen I*, § 32 lautet: »Aus jedem Puncte o außerhalb einer geraden Linie xy läßt sich Eine und nur Eine Linie auf die letztre so ziehn, daß sie gleiche Nebenwinkel an ihr bilde.«. Die zweite Folgerung findet sich in § 38: »Es gibt also nicht mehr als zwey Linien om, on aus o auf xy, bei denen entweder I. om = on, oder II. $\angle$ aom = $\angle$ aon, oder $\angle$ amo = $\angle$ ano seyn soll.«. (a ist Fußpunkt des Lots aus o auf xy.)

[3] Der Titel des MS ist: *Elementa Arithmetices et Geometriae, Illustri Comiti Carolo Clam – Martinitz tradita anno 1808*. Für eine Besprechung der erwähnten Stelle, siehe Einleitung.

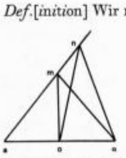
[4] *Betrachtungen I*, § 34 lautet: »Alle Winkel, die ihren Nebenwinkeln gleich sind, sind auch unter einander gleich.«

§ 39: »Aus demselben Puncte o läßt sich nur Eine Linie oa auf die Unbegränzte xy so ziehen, daß sie mit demselben ins Unbestimmte verlängertem Theile ax dieser Linie einen gegebenen Winkel oax bilde.«

§ 40: »Conclusio in modo tollente: Wenn also zwey Linien ac, bd mit Schenkeln, die denselben ins Unbestimmte verlängerten Theil der xy enthalten, gleiche Winkel bilden cax = dbx; so können diese Linien bey, c, d nirgends zusammenstoßen.«.

Wenn § 39 wegfällt, dann auch § 40 (die conclusio in modo tollente). Ebenfalls § 41 deren Beweis sich auf § 39 stützt, und § 42, § 43 welche sich auf § 41 stützen. § 44 wird mit § 42 gefolgert. (Vgl. auch die Einleitung.)

Def.[*inition*] Wir ne[nnen] W[*in*]k[e]l *r*[e]*cht*, d[ie] ihr[en] N[e]b[e]nw:[*in*keln] gl[*ei*]ch s[in]d, ohne ‖ Vorausz[u]s.[etzen], d[a]ß alle R.[echten] W[*in*kel] *u*[n]*t*[e]*rein.*[ander] gl[*ei*]ch s[*in*]d; *senkr*[e]*cht* heißt etc |



L[e]*hrs.*[atz] Aus 2 v[e]rsch:[*ie*denen] P[*un*]ct[en] m, n E[*in*e]s Sch[e]nk[e]ls kö[nnen] [nic]ht 2 Li[n*ie*n] zu | d[e]ms.[elben] P[*un*]cte o des and.[eren] Sch[en]k[e]ls g[e]zog[en] w[e]rd[en], d[ie] beyde daran | r[e]chte W[*in*]k[e]ln bildet[en]. (N. Ist ja w[o]hl schon b[e]wies[en] im §. 41.) |

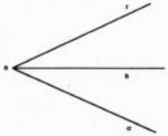
B[e]*w*[*ei*]*s*. Denn m̄[an] nehme o*α* = oa; u[nd] ziehe m*α*, n*α*. So wär[en], w[e]g[en] d[e]r ‖ gl[*ei*]ch[en] N[e]b[en]wi[n]k[e]ln am = *α*m, an = *α*n. Ab[e]r an = am + mn also |

*α*n = *α*m + mn, f[o]lgl.[*ich*] | [mü]ßte n in d[e]r g[e]r.[aden] L.[*inie*] m*α* seyn. Also m [m]it n e[*ine*]rley. – |

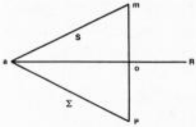
" *R*[e]*chte W.*[inkel] *s*[in]*d einand*[e]*r gl*[*ei*]*ch o*[der] *ähnl*[*ic*]*h*,, – ka[nn] [nic]ht and[e]rs b[e]wies[en] w[e]rd[en], als w[enn] ich zeige: sie | w[e]rd[en] auf gl[*ei*]ch[e] Art *b*[e]*st*[imm]*t*; [nun] w[ir]d ein W.[*inkel*] b[e]st[*imm*]t d[urc]h d[ie] *beyd*[en] *R*[*i*]*cht*[*un*]*g*[en], d[e]r B[e]w[*ei*]s | wird sich also stütz[en] [mü]ss[en] auf d[em] Gr[un]ds.[atz] d[a]ß wir k.[*eine*] apr.[*iori*sche] Vorst.[ell*ung*] v.[on] *R*[*i*]*cht*[*un*]*g* ‖ haben. Er w[ir]d g[e]führt w[er]d[en] [mü]ss[en] a.[*us*] den B[e]gr[i]ff[en] d[e]r *Seite*, *Eb*[en]*e*, etc – – |

Erkl.[*ärung*] R[*i*]cht[*un*]g[en] a.[*us*] 1 P[*un*]cte s[in]d entw.[eder] v.[on] d[e]r Art, d[a]ß d[ie] E[*in*]e d[ie] And[e]re *b*[e]*stim̄*[m]*t*, d.h. e[*in*] Syst.[em] [m]it ihr | bildet, das k.[*eine*] and[e]re [m]it ihr z[u] bild[en] v[e]rmag *o*[der] [ni]cht. Im *erst*[en] Fall heiss[en] sie *entg.*[egengesetzt], | im Zweyt[en] bild[en] sie e[inen] *W*[in]*k*[e]*l*. – Es w[ir]d ang[e]n.[ommen], d[a]ß *beyd*[e]*s mögl*[*i*]*ch sey*. – |

Erkl.[är*ung*] W[enn] 2 R:[*ichtungen*] ar, as ei[nen] *W*[in]*k*[e]*l* bild[en], so gibt es also w[en*i*]gst[en]s noch e[*in*]e R.[*ichtung*] a*σ* ‖ w[e]lch[e] [m]it ar eb[en] dens.[elben] W[*in*]k[e]l bildet. Es [mu]ß also etw[a]s geb[en], | w[e]lch[e]s d[ie] as in B[e]zug auf ar hat, das d[e]r a*σ* [ni]cht z[u]kom[m]t, d[*ie*]s[e]s | heisse ich d[ie] *Seite* in d[e]r as zu ar liegt. |



L[e]*hrs.*[atz] Es gibt zu j[e]d[e]r Seite S d[e]r R[*i*]cht[un]g ar e[*in*]e And[e]re, ihr *entg*[e]*g*[enge]*s*[e]*tzte* Σ, d.h. | e[*in*]e solche w[e]lch[e] [m]it

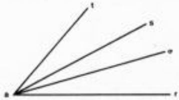


j[e]n[e]r ein Syst.[em] bildet, d[er]gl.[e*i*chen] k.[e*i*ne] and[e]re bildet. *B*[e]*w*[*ei*]*s*. Denn m̄[an] ‖ n[e]hme in d[e]r S.[e*i*te] S irg[en]d e[*in*]e R[*i*]cht[*un*]g aS u[nd] in ihr irg[en]d e[ine]n P[*un*]ct m, an, | ziehe mo s[e]nkr[e]cht auf aR, v[e]rläng[e]re mo üb[e]r o, d[a]ß oμ = om, | so ist ∠ μao = ∠ mao u[nd] gl[*ei*]chw[o]hl am, aμ [nic]ht e[*i*ne]rl.[*ei*] [m]ithin lieg[en] | am, aμ zu *v*[e]*rsch*[*ie*]*de*[nen] Seit[en] d[e]r R[*i*]cht[un]g ao. Ab[e]r aμ w[ir]d b[e]st[imm]t

106 d[u]rch am. *Also* ‖

L[e]*hrs*.[atz] W[enn] v.[on] den 3 R.[*i*cht*u*ngen] ar, as, at 2 entw[e]d[e]r nach d[e]rs.[elben] *o*.[der] auf entg:[egengesetzten] | Seit[en] v.[on] d[e]r $3^{\text{t[en]}}$ z.B. as, at nach e[*i*ne]rl[*ei*] Seite v.[on] ar lieg[en]; so gilt | eb[en] d[*ie*]se Entg[e]g[en]s[e]tz[un]g *o*[der] E[*i*ne]rl[*ei*]h[*ei*]t auch b.[*ei*] as, at. |

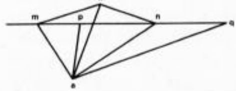
B[e]*w*[*ei*]*s*. Denn setzet ar, as läg[en] w[e]d[e]r *nach* e[*i*ne]rl[*ei*] Seit[e] ‖ d[e]r at, w[e]d[e]r nach entg[e]g[enge]s.[etzten] Seit[en] d[e]rs[e]lb[en]; so w[ür]d[en] | sie also ein Syst[e]m bild[en], dem es ein gl[*ei*]ch[e]s an at | gäbe, z.B. ar, aσ würd[en] eb[en] dass[e]lbe Syst[em] [mi]t | at bild[en], w[e]lch[e]s ar, as [m]it at bild[en]. –



A.[*us*] d[e]r Gl[*ei*]chh[*ei*]t d[*ie*]s[e]r beyd[en] System[e] | würde f[o]lg[en], d[a]ß auch d[ie] Stücke, w[e]lche in ihn[en] gl[*ei*]chn[a]hm[*i*]g s[*in*]d, *gl*[*ei*]*ch* s[*in*]d. Also ‖ das V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]ß d[e]r beyd[en] Seit[en] ras u[nd] rat, = d[e]m V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]ß d[e]r beyd[en] Seite[n] raσ | u[nd] rat. quod repugnat. |

(N. Ich ne[nn]e e[*in*]e *Seite* d[urc]h 3 Bu[c]hstab[en], d[e]r[en] [m]ittl[e]r[e]r d[e]r P[*un*]ct ist | a.[*us*] w[e]lch[e]m d[*ie*] beyd[en] R:[*i*cht*u*ngen] ausg[e]h[e]n, d[e]r erste ist ein P.[*u*nkt] in d[e]rj.[en*i*gen] R.[*i*cht*u*ng], aus w[e]lch[e]r d[ie] 2te | b[e]zog[en] wird, d[e]r 3^{te} B[*u*]chst.[abe] ein P.[*u*nkt] in d[e]r *zweyt*[en] R.[*i*cht*u*ng]:) ‖

L[e]*hrs*.[atz] Alle Li.[n*ie*n] die a.[*us*] d[e]ms.[elben] P[*un*]cte a zu P[*un*]ct[en] d[e]rs.[elben] g[e]r[aden] L[*inie*] mn g[e]zog[en] w[e]rd[en], | lieg[en] (w[enn] m̄[an] so sag[en] darf) in e[*i*ne]rl[*ei*] *unendl*[*i*chen] | *Eb*[en]*e*, d.h. je 2 d[e]rs.[elben] lieg[en] in solch[en] | Seit[en] d[e]r $3^{\text{t[en]}}$, d[ie] entw.[eder] e[*i*ne]rl.[*ei*] *o*[der] entg[e]g[enge]s[e]tzt s[in]d. – ‖



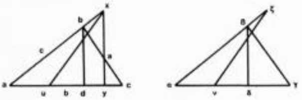
B[e]*w*[*ei*]*s*. Denn g[e]s[e]tzt die *Seit*[e]*n* | map u.[nd] man bildet[en] ei[nen] *Wink*[e]*l* (wied[e]r ein neu[e]s Wort.) so gabe es | w[e]n[*i*]gst[en]s noch e[*in*]e R.[*i*cht*u*ng] aπ w[e]lche ein gl[*ei*]ch[e]s Syst[em] [m]it den beyd[en] am, an |

bildete. Mithi[n] [mu]ß, w[enn] m̄[an] aπ = ap [nimm]t, mp = mπ; np = nπ, | seyn. Also [mu]ß π in mn lieg[en]. – ‖

§ *Def.*[*inition*] M.[an] ne[nn]e d[ie] *unendl*[*iche*] *Eb*[en]*e* des W[*in*]k[e]ls abc (*o.*[der] d[e]r 3 P[*un*]cte a, b, c) d[en] Inb[e]g[*ri*]ff all[e]s | desj.[en*igen*], was d[ur]ch s.[*eine*] Lag[e] zu d[en] 3 P[*un*]ct[en] b[e]st[*imm*]t w[ir]d. D[*ie*]se Def.[*inition*] ist w[*ei*]t[e]r als d[ie] | vorh[e]r[*i*]ge, also g[e]lt[en] d[ie] vor[*i*]g[en] Sätz[e] auch j[e]tzt noch. |

So eb[en] entd[e]cke ich ein[en] Weg, d[en] *dritt*[en] Achilles, d.h. d[en] Satz, *d*[a]*ß d*[ie] *3 Seit*[en] *ein* △ b[e]st[immen] – ohne | §. 34. z[u] b[e]weis[en]; w[enn] m̄[an] [nu]r v.[on] d.[em] Gr[un]ds.[atz] ausg[e]ht: *Ein W*[*in*]*k*[e]*l a sey ein*[em] ‖ *and*[e]*r*[e]*n α dann g*[e]*wiß gl*[*ei*]*ch, w*[enn] *alle g*[e]*r*[aden] *Li*[*nien*], *die m̄*[an] *d*[urc]*h b*[e]*lieb*[*i*]*ge P*[*un*]*cte ihr*[e]*r Sch*[e]*nk*[e]*l* | *ziehet so oft gl*[*ei*]*ch s*[in]*d als die Abst*[än]*de d*[*ie*]*s*[e]*r P*[*un*]*cte v.*[on] *d*[en] *Sch*[e]*nk*[e]*ln gl*[*ei*]*ch s*[in]*d, u*[nd] *kurz,* | *w*[enn] *sich gar k.*[ein] *M*[e]*rkm*[a]*hl d*[e]*r Ungl*[*ei*]*chh*[*ei*]*t w*[a]*hrn*[e]*h*-[men] *läßt.* |

Denn w[enn] [nu]r, in Einem Falle, b.[*ei*] ab = αβ u[nd] ac = αγ, auch bc = βγ ist, | so [mu]ß d[ie]ß f.[*ür*] j[e]den and[e]ren Fall ax = αξ; ‖ au = αυ gelt[en]. *B*[e]*w*[*ei*]*s* Denn m̄[an] ziehe in | △ abc das P[e]rp[en]d[*i*]k[e]l bd, so wird bd, sow[o]hl



als ad b[e]st[*imm*]t | d[urc]h d[ie] 3 Seit[en] a, b, c (die B[e]w[*ei*]se v.[on] §. 46.) ist [nun] ax b[e]stim̄[m]t, so ist auch das | P[e]rp[en]d[*i*]k[e]l xy, u.[nd] d[e]r Kath[e]t[e] ay b[e]st[*imm*]t. Ist au b[e]st[*imm*]t, auch uy [m]ithin auch | ux. Also (so sollte d[e]r S[a]tz ausg[e]dr[ü]ckt seyn) *e*[*in*]*e e*[*in*]*z*[*i*]*ge Entf*[e]*r*[*nun*]*g zw*[*i*]*sch*[en] ‖ *2 P*[*un*]*cten 2er Sch*[e]*nk*[e]*l b*[e]*stim̄*[m]*t alle Entf*[e]*r*[nun]*g*[en] *zw.*[ischen] *all*[en] *übr*[*i*]*g*[en] *P*[*un*]*ct*[en] *in d*[en] *Sch*[e]*nk*[e]*ln dies*[e]*s W*[*in*]-*k*[e]*ls.* ‖ 107

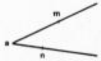
Wohl z[u] *m*[e]*rk*[en]. Eig[en]tl[*i*]ch hätt[en] d[ie] Theoreme §. 12. 41. 46.[5] (3 Achilles) so ausge-|dr[üc]kt w[e]rd[en] soll[en]: 1. Das V[e]rh[*ä*]lt[*ni*]ß 2er S.[*eiten*], u.[nd] d[e]r W.[*inkel*] den sie e[in]schließ[en] be-|stim̄[m]t | alle

[5] ***Betrachtungen I*, § 12 lautet: Zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bestimmen das Dreyeck, dem sie zugehören.**

§ 41: Eine Seite und die zwey ihr anliegenden Winkel bestimmen das Dreyeck, dem sie zugehören.

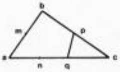
§ 46: Drey Seiten bestimmen das Dreyeck, dem sie zugehören.

i[nne]r[e]n Präd.[*i*kate] des Dreyecks. (*Zus.*[atz] 2 △△ also, wo – –, s[*in*]d *gl*[*ei*]*ch*). – | 2. *Zwey W.*[*in*kel] e[*in*e]s △△ b[e]st[*immen*] alle i[nne]r[e]n M[e]rkm[a]hle des △. (Zus.[atz] ist ‖ also 1 S.[*ei*te] *gl*[*ei*]*ch*, –) 3. Das V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]ß d[e]r drey Seite[n] e[*in*e]s △ b[e]st[*imm*]t alle i[nne]r[e]n M[e]rkm[a]hle | e[*in*e]s △. – – (D[e]r 1^{te} S.[atz] ist eig[en]tl[*i*]ch *ganz id*[en]*t*[*i*]*sch*, de[nn] e[in] W.[*in*kel] he[*i*]ßt | dasj.[en*i*ge] was alle Entf.[ern*un*gen] b[e]st[*imm*]t. – D[e]r

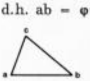


W.[*in*kel] a heißt dasj.[enige] x., was | das V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]ß am : mn, a.[*us*] dem | V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]sse am : an b[e]stim̄[m]t. m, n mög[en][c] in d[en] Directio[nen] aR, aS wo i[mme]r ‖ ang[e]nom̄[men] w[e]rd[en]. – Im $3^{t(en)}$ S.[atz] wird d[*ie*]s[e]s x dahin b[e]stim[m]t, d[a]ß es sey | *Ein* e[*in*]z[*i*]g[e]s solch[e]s V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]ß: *o*[der] we[nn] [nu]r f.[*ür*] *Ein* am : an, *Ein* z[u]g[e]hör[*i*]g[e]s am : mn | g[e]g[e]b[en] ist, so s[in]d f.[*ür*] *Alle* am : an die z[u]g[e]hör[*i*]g[en] am : mn g[e]g[e]b[en]. |

D[e]r 2^{te} *Satz* heißt eig[en]tl[*i*]ch: W[enn] [un]s die R[e]g[e]l g[e]g[e]b[en] ist |



nach w[e]lch[e]r | a.[*us*] am : an, am : mn, u.[nd] aus cp : cq, cp : pq g[e]f[un]d[en] w[ir]d; so[d] ‖ s[*in*]d [un]s alle *i*[nne]*r*[e]*n M*[e]*rkm*[a]*hle* des △ g[e]g[e]b[en]. – *U.*[nd] *hieraus geht, wo i*[c]*h* [mic]*h* [ni]*cht* | *in d*[*ie*]*s*[e]*m Aug*[en]*bl*[*i*]*ck irre, die frappante Entd*[e]*ck*[un]*g h*[e]*rvor*, d[a]ß d[ie]s[e]r 2^{te} *Satz* e[*in*]e | bloß *alg*[e]*br*[ai]*sche* F[o]lg[e]r[un]g sey. Denn w[enn] d[ie] W.[*in*kel] a, c *g*[e]*g*[e]*b*[en] s[in]d; | so ist hied[*urc*]h auch das V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]ß ab : bc g[e]g[e]b[en], es sey ab : bc = 1 : x, od[e]r, *o*[der] bc = x.ab; | so hat m̄[an] w[*ei*]l d[e]r W[*in*]k[e]l a g[e]g[e]b[en] ist; bc g[e]g[e]b[en], w[enn] ab, ac g[e]g[e]b[en] *s*[*in*]d, d.h. ‖ bc = f(ab, x.ab) wo f irg[en]d e[*in*]e *g*[e]*g*[e]*b*[en]*e* b[e]st[imm]te F[*un*]c-t.[*i*on] b[e]deutet, d[ie] [nu]r Ei[nen] W[er]th | f.[*ür*] bc enthält. 2., w[*ei*]l d[e]r W.[*in*kel] c g[e]g[e]b[en] ist, so hat m̄[an] ab, w[enn] ca, cb g[e]g[e]b[en] s[*in*]d; | d.h. ab = φ(x.ab, f(ab, x.ab) Aus w[e]lch[e]r Gl[*ei*]ch[un]g x g[e]f[un]d[en]

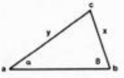


w[e]rd[en] kann. | (Kürz[e]r, u.[nd] deutl[*i*]ch[e]r $\frac{cb}{ab} = f(\frac{ac}{ab})$; $\frac{ac}{ab} = \varphi(\frac{bc}{ab})$; also $\frac{ac}{ab} = \varphi(f(\frac{ac}{ab}))$ | woraus $\frac{ac}{ab}$ g[e]f[un]d[en] w[e]rd[en] kann. – "Ab[e]r d[a]ß es [nu]r *Ein*[en] W[e]rth hab[en] ‖ könne?„– $f(\frac{ac}{ab})$ ist ein Ausdr.[*u*ck] d[e]r [nu]r 1 W[e]rth hat, w[enn] $\frac{ac}{ab}$ [nu]r 1 W[e]rth hat; φ(–) ab[e]r | m[a]hls; dah[e]r ist $\varphi(f(\frac{ac}{ab})$ üb[e]rh.[*au*pt] e[*in*]e Funct.[*i*on], d[ie] f.[*ür*] 1 W[e]rth v[on] $\frac{ac}{ab}$ [nu]r 1 W[e]rth hat. | Heiße $\frac{ac}{ab} = x$, φ[fx] = Fx = x Da also . . . . (?) – |

Od[e]*r*, [m]*it and*[e]*r*[e]*n Wort*[e]*n*: die [inne]r[e]n M[e]rkm[a]hle e[ine]s △

[c] Im MS »mog«.

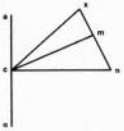
[d] Am Vorderrand eine Akkolade von Z. 14 bis Z. 32.



s[in]d im Gr[*un*]de das V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]ß | d[e]r 3 Seit[en] ab : ac, ab : bc; (de[nn] d[a]d[urc]h ist schon ac : bc ‖ b[e]-st[imm]t). U.[nd] dazu s[in]d ∠ a, ∠ b g[e]g[e]b[en]. D[u]rch | ∠ a, ist [nun] ab : bc b[e]st[*i*mm]t, w[enn] ab : ac g[e]g[e]b[en] ist; d[u]rch | ∠ b ist ab : ac b[e]st[*i*mm]t, w[enn] ab : bc g[e]g[e]-b[en] ist. |

W[enn] ich also d[ie]se beyd[en] V[e]rh[*ä*]lt[n*i*]sse *o*[der] ihre Expo[nen]t[en] x, y ne[nn]e, so si[n]d [m]ir (d[u]rch d[ie] | Ang[a]be d[e]r W[*i*n]k[e]l) g[e]w[i]sse B[e]d[*i*]ng[*un*]g[en] g[e]g[e]b[en], d[u]rch w[e]lche ich y aus x, u[nd] x aus y f[*i*n]d[en] ‖ kann. $y = fx, x = \varphi y$; $(: y = F(x, \alpha), x = F(y, \beta). x = F(F(x, \alpha), \beta)$ ..(?) Auch S. 193. |

G[e]g[e]nw[*ä*]rt[*i*]g steigt ab[e]rm[a]hls d[e]r G[e]danke in mir auf, den ich schon ehed[e]m | einm[a]hl g[e]hegt. "d[a]ß m̄[an] d[en] Satz, d[a]ß w[enn]



∠ acm = R = ∠ acn sey, j[e]der and[e]re W.[*i*nkel] | ∠ acx (wo x in mn liegt) gl[*ei*]chf.[alls] = R seyn [mü]sse – gl[*ei*]ch-w[o]hl | ohne d[ie] Vorauss[e]tz[un]g, *d*[a]*ß ca b*[e]*stim̄*[m]*t sey d*[u]*rch die B*[e]*ding*[un]*g* ∠ *acm = R =* ∠ *acn* ‖ b[e]-weis[en] kö[nn]e,,; ind[e]m dieß b[e]k[a]nntl[*i*]ch bloß d[a]r[au]s f[o]lgt, d[a]ß das Syst[e]m acmn *gl*[*ei*]*ch* | sey d[e]m System αcmn; allein um d[ie] Gl[*ei*]chh[*ei*]t d[*ie*]s[e]r Syst[e]me z[u] b[e]wei-s[en], ist es [ni]cht nöth[*i*]g voraus | z[u] setz[en], d[a]ß ∠ acm = R = ∠ acn die ca *b*[e]*st*[*i*mm]*e*. – – O ja doch! ‖ 108

Ab[e]*r*, d[a]ß *ca* [ni]*cht in d*[e]*r Eb*[en]*e mcn* liege, *o*[der] [ni]cht d[urc]h s.[*ei*ne] Lage zu mcn b[e]st[imm]t | w[e]rde, – das kann m̄[an] w[o]hl b[e]haupt[en]. Denn entw.[eder] es gibt [nu]r e[*i*n]e | e[*i*n]z[*i*]ge g[e]r[a]d[e] L.[*i*n*ie*] aα d[ie] auf cm, cn *z*[u]*gl*[*ei*]*ch* s[e]nkr[e]cht steht, *o*[der] es gibt der[en] m[e]hr[e]re. | Gibt es [nu]*r e*[*i*n]*e E*[*i*n]*z*[*i*]*ge*, so wird off[en]b[a]r das Stück ca d[e]rs[e]lb[en] eb[en] so b[e]st[*i*mm]t, wie ‖ das St[üc]k cα, d[e]r P[*un*]ct a eb[en] so wie α, u. s. w. [m]ithin s[in]d a, α *auß*[e]*rh*[a]*lb* d[e]r Eb[e]ne | mcn: f[e]rn[e]r j[e]de L.[*i*n*ie*] in mcn aus c g[e]zog[en], [m]uß [mi]t aα r[e]chte W.[*i*nkel] bild[en]. – |

2. Gibt es *m*[e]*hr*[e]*re Li*[n*ie*n], die [m]it cm, cn z[*u*]gl[*ei*]ch r[e]chte W:[*i*nkel] bild[en], so b[e]st[immen] dah[er] | d[ie] 3 W[*i*n]k[e]l, w[e]lche 3 a.[*us*] 1 P[*un*]cte ausg[e]h[en]d[e] R[*i*]cht[*un*]g[en] [u]nt[e]rein.[ander] mach[en], alle Prädi-| cate, d[ie] sich an d[*ie*]s[e]m Syst[e]me w[a]hrn[e]hm[en] lass[en], d[enn] sie b[e]st[immen] *alle Entf*[e]*r*[n*un*]*g*[en] ‖ zw.[*i*schen] b[e]st[imm]t[en] P[*un*]c-