BERNARD BOLZANO - GESAMTAUSGABE

HERAUSGEGEBEN VON EDUARD WINTER, JAN BERG,
FRIEDRICH KAMBARTEL, JAROMÍR LOUŽIL, BOB VAN ROOTSELAAR

REIHE II

NACHLASS

B. WISSENSCHAFTLICHE TAGEBÜCHER

BAND 2

MISCELLANEA MATHEMATICA

BERNARD BOLZANO

MISCELLANEA MATHEMATICA 1+2

HERAUSGEGEBEN

VON

BOB VAN ROOTSELAAR UND

ANNA VAN DER LUGT

FRIEDRICH FROMMANN VERLAG (GÜNTHER HOLZBOOG)

STUTTGART-BAD CANNSTATT 1977

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bolzano, Bernard
[Sammlung]
Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe / hrsg. von Eduard Winter...
Stuttgart - Bad Cannstatt : frommann-holzboog.

Reihe 2, Nachlass.
B, Wissenschaftliche Tagebücher

Bd. 2. Miscellanea mathematica : 1 u. 2 /
hrsg. von Bob van Rootselaar u. Anna van der Lugt.
1. Aufl. - 1977.

ISBN 3-7728-0434-9

© FRIEDRICH FROMMANN VERLAG (G. HOLZBOOG) STUTTGART-BAD CANNSTATT 1977

SATZGESTALTUNG UND DRUCK: OFFIZIN CHR. SCHEUFELE STUTTGART

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort 7

Einleitung 9

Miscellanea Mathematica, Heft 1 21

Miscellanea Mathematica, Heft 2 105

Bibliographie 179

Personenregister 181

Sachregister 183

VORWORT

Dieser Band enthält eine Transkription der Seiten 1–104 der mathematischen Tagebücher Bolzanos *Miscellanea Mathematica*. Die Veröffentlichung geschieht gemäß der pauschalen Genehmigung der Handschriftensammlung der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien vom 2. Januar 1967. Nach der Gliederung der Bernard Bolzano-Gesamtausgabe im Band E 2/1 aus dem Jahre 1972, S. 179 wird dieser Band mit II B 2/1 bezeichnet.

Die Ausgabe ist mit gewissen Ausnahmen, die in der Einleitung beschrieben werden, gemäß den Editionsprinzipien in Band E 2/1 hergestellt. Für eine kurze Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Handschrift und Druck sei auf die nachstehende Einleitung hingewiesen.

Wir danken Diet Berends für die genaue Bearbeitung unserer Handschriften und Dr. S. J. Suys-Reitsma für die ständige Hilfe bei der Korrektur und den Konjekturen bei den lateinischen und griechischen Textteilen.

Die Herausgeber
B. VAN ROOTSELAAR
A. VAN DER LUGT

EINLEITUNG

Dieser Band enthält das erste Heft und einen Teil des zweiten der Folge Miscellanea Mathematica – im folgenden mit MM bezeichnet – welche insgesamt aus vierundzwanzig Heften besteht. Für eine Beschreibung dieser in der Handschriftensammlung der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien befindlichen Manuskripte sei auf den Katalog des Bolzano-Nachlasses von J. Berg hingewiesen (Bernard Bolzano Gesamtausgabe, E 2/1, Stuttgart 1972, S. 28–30).

Die Aufzeichnungen in den ersten zwei Heften erstrecken sich über die Jahre 1803 bis 1812. In der ursprünglichen Paginierung läuft Heft 1 von S. 1 bis S. 56 und Heft 2 von S. 57 bis S. 210. Dieses Heft ist hier bis S. 104, Z. 28 abgedruckt worden. Die Aufzeichnungen sind im allgemeinen nicht datiert. In den ersten Heften finden wir nur ganz wenige Datierungen, während insbesondere die Anfänge der neuen Hefte kein Datum tragen.

Im ersten Heft finden wir auf S. 2 »etwa Dezember 1803« und auf S. 2 und S. 19 Nachträge aus 1814, ferner noch auf S. 6 die Jahreszahl »1802« und auf S. 13 »den 17. Nov. 1804«. Das nächste Datum ist 27. Sept. 1808 auf S. 128 im zweiten Heft. Die Datierung weist also beträchtliche Lücken auf, doch läßt sich daraus nicht auf eine Lücke in der Entstehungszeit der Aufzeichnungen schließen, denn die durchschnittliche Seitenzahl pro Jahr beträgt für die Periode 1803–1808 etwa 25 und für die Periode 1808–1811 etwa 23. Doch ist es nicht unwahrscheinlich, daß bedeutend weniger Aufzeichnungen aus den Jahren 1805–1807 als aus den Jahren 1803–1805 und 1807–1808 stammen, weil man vermuten kann, daß Bolzano von 1805 bis 1807 als Professor der Religionswissenschaft sehr beschäftigt war.

1804 war die Arbeit *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* erschienen, und ein beträchtlicher Teil der Aufzeichnungen des ersten und zweiten Heftes bezieht sich darauf. Bolzano bearbeitet die Sache noch einmal, versucht sie zu vertiefen, zu korrigieren und zu ergänzen. Er

versucht eine Art axiomatischen Aufbau unter Benutzung des Begriffes der Bestimmbarkeit nach Leibniz und Wolff zu konzipieren.

Er hat sich entschlossen, ein eigenes System der Geometrie zu konstruieren (MM 37), erstens weil die üblichen Systeme zu viele undefinierte Begriffe verwenden wie Richtung, Winkel, Winkelgröße, zwischen, außerhalb, innerhalb. Ferner wird nicht einmal die Möglichkeit dieser Begriffe gezeigt (MM 43). In Fällen, wo es nicht möglich ist, die Gegenständlichkeit der Begriffe zu zeigen oder wenn die Gegenständlichkeit nicht einleuchtend ist, postuliert Bolzano die Existenz, z. B. einer Richtung, explizite. Tatsächlich sucht er unermüdlich diesen Einwänden beim Aufbau seines eigenen Systems zu entgehen. Doch muß er gestehen, daß es sehr schwierig ist, die Widerspruchslosigkeit seiner Existenzannahmen zu zeigen (MM 38).

Zweitens besteht ein Mangel der üblichen Systeme in der Verwendung unerwiesener allgemeiner Sätze, welche auch nicht explizite postuliert werden, also nicht als Grundsätze angegeben werden (MM 38). Schließlich kommt noch der Gebrauch von nicht zur Geometrie gehörigen Mittelbegriffen und die Verwendung des Begriffs Unendlich hinzu.

Die Anwendung des wesentlichen Begriffs in Bolzano's System – des Begriffs der Bestimmbarkeit – führt zu großen Schwierigkeiten, denn dieser Begriff ist mehrdeutig. Ein geometrisches Gebilde nämlich heißt bestimmbar aus gegebenen, wenn daraus folgt, daß es nicht anders sein kann. Das Gebilde heißt dann bestimmt aus seinen bestimmenden Stücken. Die bestimmenden Stücke können aber von Fall zu Fall verschieden sein. Z. B. heißt es auf MM 8: Ein Punkt wird nicht anders bestimmt als dadurch, daß er sich in einer geraden Linie in gegebenen Entfernungen von zwei Punkten derselben befindet. Es gibt aber für Bolzano noch eine zweite Möglichkeit, nämlich daß er Schnittpunkt sei von zwei gegebenen verschiedenen geraden Linien. Derartige verschiedene Möglichkeiten machen es schwer festzustellen, welche die bestimmenden Gegenstände sind und auf welche Weise sie das Gebilde bestimmen. Dazu braucht man eine Axiomatik des Bestimmens. Das aber erreicht Bolzano nicht, denn man sucht vergebens etwas derartiges unter den Axiomen seiner Geometrie auf MM 100. Diese Grundsätze, es gibt deren fünf, sind teilweise durch die mathematische Tradition, teilweise durch die philosophische Tradition bestimmt und völlig unzureichend. Ja, sie verstoßen gegen seine eigenen Forderungen. So lautet z. B. der erste Grundsatz: es gibt Dinge, die keine Teile haben (Punkte) und der zweite: wir haben keine a priorische Vorstellung von einem Punkt. Obgleich Bolzano als fünften Grundsatz hinzunimmt, daß die Entfernung

ab gleich ba ist, glaubt er auch bewiesen zu haben, daß ab = ba (MM 100, 101). Aus dem Beweis geht hervor, wie der zweite Grundsatz verwendet wird. Man denke sich die Punkte a und b nebeneinander (siehe auch MM 42). Weil wir keine a priorische Vorstellung von einem Punkt haben, können wir von a nur aussagen, daß er nicht b ist und umgekehrt. Daraus folgt, daß die Prädikate des Systems gleich sein müssen, mag b auf a oder a auf b bezogen werden. Das einzige vergleichbare Prädikat ist die Entfernung (!), also ist ab = ba. Doch bereitet ihm der Begriff der Entfernung Schwierigkeiten. Auf MM 4 fragt er sich, ob Entfernung nicht definiert werden könne als dasjenige, was an zwei Punkten für sich zu bemerken ist. Auf MM 38 wird der Begriff ohne weiteres angewendet, auf MM 100 als Grundsatz und auf philosophische Art deduziert. Das geschieht auf MM 101 noch einmal, jetzt unter Heranziehung des Satzes vom zureichenden Grund (MM 60) auf Leibnizsche Art. Das geht so: wenn er sich die Entfernungen nicht gleich denkt, so müßte er sie sich ungleich denken, und hierzu hätte er keinen Grund.

Man sollte beachten, daß die Mehrzahl der elementargeometrischen Aufzeichnungen sich auf gewisse Stellen der gedruckten Abhandlung *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* beziehen. Die oben angeführten Aufzeichnungen sind als Versuche zu betrachten, die in den späteren Heften fortgesetzt werden.

Neben den elementargeometrischen Aufzeichnungen gibt es viele zur Mechanik gehörige. Darunter sind erstens die, welche auf eine lehrbuchartige Darstellung der elementaren Sätze über Gleichgewicht und Zusammensetzung von Kräften zielen. Dann gibt es einen ausführlichen Versuch (MM 10) der Begründung des Verhältnisses von Wirkung und Ursache. Bolzano versucht darzutun, daß das Verhältnis von Wirkung und Ursache das von Funktion zu ihrer Ableitung ist. Das heißt, wenn u die Ursache ist und w ihre Wirkung, und u = ft, w = Ft, so soll F't = ft sein, jedenfalls für stetige Ursachen. Diese Stetigkeit soll dabei so verstanden werden, daß ft eine Darstellung mittels einer Taylorschen Reihe hat. Wenn z. B. ein materieller Punkt eine Bahn beschreibt, so wird die Geschwindigkeit als Ursache der Bewegung angesehen. Bolzano sieht die Mechanik also als Anwendungsgebiet der Ursachenlehre, oder Aetiologie an.

Das dritte Hauptthema der mechanischen Aufzeichnungen handelt von der Bestimmung des Schwerpunkts eines Punktsystems. Auf MM 4 wird die Aufgabe folgendermaßen gefaßt: Der Schwerpunkt soll aus allen Punkten eines Systems in jeder beliebigen Ordnung auf einerlei Art bestimmt

sein. Wenn man die Aufgabe so stellt, so soll erstens die Existenz eines derartigen Punkts erwiesen werden und zweitens eine Formel hergeleitet werden, welche den Schwerpunkt ergibt. Den ersten Teil der Aufgabe (die Existenz) versucht Bolzano mit Hilfe des Satzes vom zureichenden Grund zu erledigen, doch ist er selber damit nicht zufrieden. Genau betrachtet führen seine Versuche, die bekannte Formel des Schwerpunkts herzuleiten, auf das Ergebnis, daß die Bestimmung auf MM 4 unzureichend ist. Doch zieht er diese Folgerung nicht, und auch nach neuen erfolglosen Anläufen auf MM 7, 25, 31, 85, 87 bleibt er wesentlich bei der früheren Bestimmung (MM 4).

Besonders hervorzuheben im ersten Heft ist eine Reihe von Aufzeichnungen, in denen eine Methode entwickelt wird, die Formel der Kurvenlänge herzuleiten. Diese Aufzeichnungen sind darum wichtig, weil das Ergebnis im wesentlichen zum ersten Mal im Druck erschien in der Abhandlung *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung* aus dem Jahre 1817. Es sei darum hier die Entstehungsgeschichte kurz zusammengefaßt, einschließlich der mehr oder weniger zutreffenden Betrachtungen, welche Bolzano im Laufe der Untersuchung angestellt hat.

Die Aufgabe, die Länge einer Kurve zu bestimmen, zerfällt in zwei Teile. Erstens soll der Begriff der Länge erklärt werden, dann soll die Formel hergeleitet werden.

Auf MM 2 heißt die Länge noch: Dasjenige was man außer der besonderen Lage jedes ihrer Punkte an einer Linie noch unterscheiden kann. Doch wird die Erklärung 1814 als unrichtig betrachtet (Nachtrag). Dann versucht Bolzano die Länge mittels der Aetiologie zu bestimmen, indem er die Sekante als Ursache der Länge betrachtet (MM 29). Weil Wirkung und Ursache sich verhalten wie eine Funktion zu ihrer Ableitung, wird die Länge eine solche Funktion von x sein, deren erste Ableitung die Sekante $(1 + y'^2)^{1/2}$ ist. Dieses Verhältnis versucht er zu folgern aus der allgemeinen Bestimmung, daß die Länge einer krummen Linie zu ermitteln, nichts anderes ist als sie mit einer geraden Linie zu vergleichen und zwar zu der gegebenen krummen Linie diejenige gerade Linie zu finden, die mit ihr gemein hat was gerade Linien mit krummen gemein haben können.

Diese Bestimmung führt nicht zum Ziel. Auf MM 51 wird die Frage erneut in Angriff genommen, und nach einem mißlungenen Versuch geht er jetzt so vor: Die Länge der krummen Linie mit der Gleichung $y = fx$ ist jene von fx abgeleitete Funktion, welche, wenn fx die Gleichung für die gerade Linie ist, die Länge derselben ergibt, übrigens aber so allgemein ist,

daß sie von der Lage der Abszissenlinie nicht abhängt. Auch diese Bestimmung führt nicht zum Ziel, und der Versuch, die Länge als eine Funktion F(x, fx) aus der Drehungsinvarianz zu bestimmen, scheitert (MM 54) ebenfalls.

Nach all diesen mißlungenen Versuchen betrachtet er die Archimedische Methode zur Rectification des Kreises mittels eingeschlossenen und umgeschriebenen Vielecken (MM 54, 55). Der wesentliche Schluß dabei ist die Behauptung (die übrigens nicht von Archimedes herrührt, doch aus der Infinitesimalrechnung stammt): Wenn eine gewisse Formel für alle Werte der Größe i gilt, so gilt sie auch für den Wert $i = 0$, für welchen man ihre Wahrheit nicht bewiesen hat. Diesen Schluß betrachtet er als unanwendbar und sogar falsch, und er gibt einen (nicht ganz einwandfreien) Beweis dafür. Man betrachte nämlich einen Kreis und beschreibe ein regelmäßiges Vieleck mit Seitenlänge i, dessen Eckpunkte auf dem Kreis liegen. Der Umfang ist also $U(i) = n.i$, wenn n die Seitenzahl des Vielecks ist. Gilt nun für den Umfang des Kreises $(i = 0)$ auch $U(0) = n \,.\, 0$? Dieser Schluß ist nicht folgerichtig, denn n ist eine von i abhängige Zahl. Doch ist diese Widerlegung nicht der wichtigste Teil der Aufzeichnung. Der ist folgender:

Wenn man die Eckpunkte durch auswärts beschriebene Halbkreise verbindet, so entsteht eine Kurve, welche sich bei Vergrößerung der Seitenzahl dem gegebenen Kreis allmählich anschmiegt, während der Umfang nicht gegen den Umfang des Kreises strebt. Und das widerlegt am klarsten die damals weit verbreitete unrichtige Meinung, daß die Länge einer Linie der Länge einer anderen Linie um so mehr nahe kommt, je näher ihre einzelnen Punkte der anderen näher kommen.

Dann kommt er auf MM 56 auf den Gedanken, die Formel der Kurvenlänge folgendermaßen herzuleiten.

Es sei die Kurve $y = f(a + i) = fa + if'a + \frac{i^2}{2} f''(a) + \ldots$ Man suche nun unter allen geraden Linien $z = fa + n \,.\, i$ diejenige, welche für die kleinsten Werte von i der krummen Linie in einer Umgebung von (a, fa) am nächsten kommt. Dazu muß $n = f'a$ sein. Daraus glaubt er schließen zu können, daß $z = fa + f'a \,.\, i$ die gerade Linie ist, welche der krummen Linie für die kleinsten Entfernungen von i an Länge am nächsten kommt. Und das nicht aus dem oben erwähnten falschen Grund, sondern weil: je näher die Gleichungen zweier Linien einander kommen, desto näher kommen einander auch alle Eigenschaften beider Linien, ihre Längen, u. s. w.

Nun verläuft die Herleitung so:

Sei die Länge von f gleich Fx, dann ist

$$F(x + i) - Fx = F'x \,.\, i + \ldots$$

Auf eben die Art, wie eine Fx von fx abgeleitet wird, wird auch die Länge der geraden Linie von z abgeleitet, diese Länge ist $(1 + f'a^2)^{1/2}$. Es sind

also $\quad fa + if'a + \frac{i^2}{2} f''a + \ldots$ und $fa + if'a$

zwei Funktionen, und

$$iF'a + \frac{i^2}{2} F''a + \ldots \text{ und } i(1 + f'a^2)^{1/2}$$

zwei von den obigen nach einem gewissen Gesetz abgeleitete Funktionen. Die zwei ersteren Funktionen haben die Eigenschaft, daß die zweite der ersten unter allen möglichen Funktionen ihrer Form am nächsten kommt. Daraus ist zu schließen, daß $F'a = (1 + f'a^2)^{1/2}$ sei.

Obgleich Bolzano in der Arbeit *Die drey Probleme* ein wenig anders verfährt und sich im wesentlichen auch auf MM 29 stützt, so hängen doch obige Entwicklungen aufs engste mit der Behandlung in *Die drey Probleme* zusammen. Dieses gilt auch für die Verallgemeinerung des Gedankens, die Länge als eine differenzierbare Funktion von Funktionen aufzufassen. Er stellt mehrere Sätze auf über derartige Funktionen, wie z. B. auf MM 73, 74, 75 und versucht vergeblich sie zu beweisen (vergl. MM 79).

Für einen wissenschaftlichen Aufbau der Geometrie ist es unbedingt notwendig, über klare und genaue Erklärungen der geometrischen Gegenstände zu verfügen. Bolzano hat sich sehr bemüht, die in der Geometrie benutzten Begriffe streng zu definieren. Darunter sind die Begriffe der kontinuierlichen Linie und der Linie überhaupt, die Begriffe zwischen, innerhalb und außerhalb.

Im ersten Heft wird die Frage, was eine Linie überhaupt sei, noch nicht geklärt (MM 30). Es erscheint einfacher zu sagen, was eine kontinuierliche Linie sei, wenn man den Begriff der Linie überhaupt voraussetzt.

Auf MM 4 ist eine kontinuierliche Linie eine Linie, welche die Eigenschaft hat, daß es zu jedem ihrer Punkte mit einem Punkt in der Entfernung r auch einen Punkt in jeder Entfernung kleiner als r gebe. Die meisten Autoren betrachten diese Definition als eine originelle Leistung Bolzanos, doch habe ich Gründe zu vermuten, daß die Erklärung damals schon ziemlich geläufig war.

Weil er die Frage, was eine Linie sei, auf MM 30 nicht befriedigend beantworten kann, schließt er sich vorläufig der herkömmlichen Bestimmung durch eine Gleichung (stetige – oder besser differenzierbare Funktion) und gewisse andere Bedingungen an, z. B. durch $y = fx$ von $x = a$ bis $x = b$ und durch $y = \varphi x$ von $x = b$ bis $x = c$. Die Hinzunahme dieser Bedingungen

rührt daher, daß die Linie entsteht aus der (stetigen = differenzierbaren) Bewegung eines Punktes.

In späteren Heften kommt Bolzano öfters auf die Definition der Linie zurück. Wir werden das in den betreffenden Einleitungen besprechen und dabei die gedruckten Arbeiten in Betracht ziehen.

Die Begriffe kontinuierliche Linie und zwischen (oder innerhalb) geben Anlaß zu einer interessanten Bemerkung. Der Begriff zwischen, definiert für die Punkte einer geraden Linie, ist bestimmt mittels der Richtungen. Laut der Abhandlung *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* aus dem Jahre 1804 ist der Punkt c der Geraden ab zwischen a und b, wenn die Richtungen ca und cb entgegengesetzt sind. Aus dieser Bestimmung (siehe *Betrachtungen* u.s.w. § 25) erklärt sich das Bolzanosche Interesse z.B. an der Frage der Existenz entgegengesetzter Richtungen in der Geometrie.

Dieser Begriff zwischen wird auf den Raum auf folgende Weise ausgedehnt. Der Punkt c im Raum heißt zwischen a und b, wenn der Fußpunkt des Lots aus c auf ab zwischen a und b liegt. Die Ebene V liegt zwischen a und b, wenn der Schnittpunkt von V mit ab zwischen a und b liegt. Anläßlich dieser Begriffsbestimmung stellt Bolzano folgenden Satz auf (MM 5): Wenn durch die Punkte a und b eine kontinuierliche Linie geht, so muß jede Ebene, die man zwischen a und b legt, wenigstens einen Punkt mit der kontinuierlichen Linie gemein haben.

Für diesen Satz wird auf MM 8 ein Beweisversuch angestellt, doch wieder aufgegeben, denn er »gerieth ins Stocken«.

Wenn man versucht, den allgemeinen Begriff der Linie zu erklären, so kommen natürlich auch verwandte Begriffe in Frage, wie der oben erwähnte Begriff der kontinuierlichen Linie. Ebenso wichtig ist es zu erklären, wann eine Linie eine geschlossene Linie ist. Dies geschieht noch nicht im ersten Heft, doch gibt es dort etwas das darauf hinweist, wenn man nämlich versucht zu erklären, wann eine Fläche von einer Linie eingeschlossen ist. Nach MM 12 heißt eine ebene Fläche von einer Linie eingeschlossen, wenn für jeden ihrer Punkte gilt, daß alle geraden Linien durch den Punkt den Umfang so schneiden, daß der betrachtete Punkt der Fläche zwischen zwei Durchschnittspunkten liegt. Man beachte dabei, daß Bolzano nicht bemerkt, daß auch der in diese Erklärung eingehende Begriff des Umfangs (Rand) einer Fläche (= flache Punktmenge) erklärt werden muß. Die ähnliche Erklärung für krumme Flächen ist untauglich, weil sie die Betrachtung aller Linien in der Fläche durch den Punkt erfordert (MM 12).

Im obigen sind die wichtigsten mathematischen und mechanischen Aufzeichnungen erörtert worden. Die Hefte zeigen noch zwei durchgehende Reihen von Aufzeichnungen auf den Gebieten der mathematischen Methode und der Aetiologie. Die Aufzeichnungen über die mathematische Methode sind ziemlich unentwickelt und beziehen sich hauptsächlich auf die Forderungen an eine wissenschaftliche Darstellung der Mathematik. Auf MM 13 beschreibt Bolzano, wie man sich in einer Wissenschaft auszeichnen kann. Erstens durch Erleichterung des Vortrags, was wohl am nützlichsten ist, zweitens durch neue Erfindungen, was nach Bolzano die gewöhnlichste Art ist und drittens durch Entwicklung der Grundlegung der Wissenschaft, was am schwersten und am wenigsten gemeinnützig ist. Diese Einteilung hat er wohl in den Universitätsvorlesungen gehört, und nach einem Rat des Professors Gerstner nimmt er sich vor, nicht mehr öffentlich in dem dritten Gebiete zu arbeiten. Es sei hier ferner hingewiesen auf die Aufzeichnungen über die Art jeder Erkenntnis auf MM 36 und auf die sieben Regeln, welche bei der Abfassung mathematischer Aufsätze zu beachten sind (MM 46, 47).

Wichtiger jedoch ist, was Bolzano auf MM 102 anläßlich der These, daß alle mathematischen Lehrsätze eine Umkehrung besitzen, bemerkt. Wenn das wahr wäre, so würden alle mathematischen Lehrsätze Gleichheitssätze sein, welche Bolzano von den Definitionen und den identischen Sätzen unterscheiden will. Eine Folgerung dieser These würde sein, daß man die Gleichheit nur dadurch beweisen kann, daß man die Gleichheit der bestimmenden Stücke zeigt. Tatsächlich hat Bolzano, unter Ablehnung der obigen allgemeinen These, die Gleichheitssätze als gesonderte Kategorie beibehalten, sowie die methodische Forderung an die Beweise solcher Sätze. Wenn er nun die Gleichheitssätze von den identischen Sätzen getrennt hat, so liegt es nahe, auch die Begriffe Einerleiheit, Ähnlichkeit und Gleichheit näher zu untersuchen. Einiges darüber findet man anschließend auf MM 103.

Sehr ausführlich beschäftigt Bolzano sich mit der Ätiologie. Wir haben oben schon gesehen, wie gewisse spezielle Beziehungen der Mathematik und Mechanik als Sonderfälle des Verhältnisses von Ursache und Wirkung angesehen werden und wie andererseits dieses Verhältnis mathematisch gedeutet wird. Aber auch die Ätiologie bedarf der Grundsätze, und diese aufzusuchen gibt Bolzano sich größte Mühe. So z.B. haben ähnliche Ursachen ähnliche Wirkungen (MM 80, 83), Dinge, welche den Grund bestimmen, bestimmen auch die Folge (MM 77) u.s.w. Die mit diesen Grundsätzen zusammenhängenden Begriffe sollen selbstverständlich auch geklärt wer-

den, wie z. B. der Begriff eines äußeren Dinges (MM 81) und der Begriff des inneren Merkmals (MM 81–84).

Zum Schluß scheint es mir notwendig hinzuweisen auf einige Fehlgriffe Bolzanos, weil dies dazu beiträgt, klar zu machen, wie es sich zur Zeit dieser Aufzeichnungen mit der mathematischen Bildung Bolzanos verhielt. MM 1 enthält einen unrichtigen Satz über die mögliche Zahl der Durchschnittspunkte von n Geraden in einer Ebene. Unrichtig – jedenfalls undeutlich – ist der Satz auf MM 5 über die Anzahl der Schnittpunkte einer kontinuierlichen Linie mit einer Ebene. Falsch ist der Satz über die Anzahl der Winkel bei n Geraden auf MM 46. In Bezug auf die Zusammensetzung der Kräfte versucht Bolzano auf MM 101 die Existenz einer gemeinsamen Schnittebene von n willkürlichen Geraden im Raum zu beweisen. Der Beweisansatz ist ungeschickt und unvollständig. Die Stelle ist darum von Bedeutung, weil Bolzano offenbar nicht auf den Gedanken kommt (kommen könnte), den projektiven Raum heranzuziehen, um den Satz zu beweisen.

Nach diesem flüchtigen Überblick über den Inhalt der MM 1–104 sei hier noch kurz erläutert, wie die Korrespondenz zwischen dem gedruckten Text und dem Manuskript ist.

Der durchgängige deutsche Text ist im MS von Bolzano in deutscher Schrift aufgeschrieben. Fremdsprachige Teile, (mathematische) Formeln und vereinzelte Buchstaben (insbesondere zu den Figuren) im Druck korrespondieren mit im MS in lateinischen Buchstaben geschriebenen Teilen, Formeln und Buchstaben. Wenn im Druck vereinzelte Buchstaben in Fraktur gesetzt sind, so korrespondieren sie mit Buchstaben in deutscher Schrift im MS.

Im MS kommen zahlreiche unterstrichene Worte und Sätze vor. Diese Teile erscheinen im Druck jedenfalls außerhalb der eckigen Interpolationsklammern und sind kursiv gesetzt. Für Kursivdruck innerhalb der Interpolationsklammern sei auf die Editionsprinzipien verwiesen (Bolzano-Gesamtausgabe E 2/1).

Im gedruckten Text wird am Ende der Zeile die Abtrennung eines Wortes durch einen Bindestrich angezeigt. Selbstverständlich korrespondiert eine derartige Stelle im MS nicht mit einer Abtrennung. Das Zeichen ist also für das MS nicht zu beachten. Die Wiedergabe der Abtrennungen im MS ist dadurch gesichert, daß das Ende einer Zeile mit einem senkrechten Strich oder Doppelstrich vermerkt ist.

Am Rand des MS kommen Vertikallinien, geschwungene Klammern, quer geschriebene Worte u. dgl. vor. Diese Anweisungen sind in Fußnoten

erwähnt. Die im Druck vorkommenden Absätze korrespondieren mit Absätzen des MS.

Es war nicht möglich, die Figuren unmittelbar dem MS zu entnehmen. Daher sind sie neu gezeichnet worden, wobei versucht worden ist, das Original treu wiederzugeben, allerdings ohne eventuelle Verzeichnungen von Bolzanos Hand.

Im allgemeinen sind gestrichene Textteile des MS ohne weiteres fortgelassen, wenn sie dem Inhalte nach völlig belanglos erschienen. Wenn aber einiges darin bemerkenswert erschien, so wurde das in einer Fußnote erwähnt.

Schließlich sei noch auf zwei Besonderheiten hingewiesen. 1. Öfters vermerkt Bolzano eine Stelle durch ein oder mehrere Notas. Im MS ist dabei manchmal schwer zu unterscheiden zwischen N und NB für Nota, bzw. Nota Bene. In Zweifelsfällen ist für das einfache N entschieden worden. 2. An mehreren Stellen sind oft als Nachträge kritische Bemerkungen von Bolzano zu eigenem oder fremdem Text in Klammern, versehen mit hochgestellten Zeichen, hinzugefügt, z.B. wie °[ ]°. Diese Merkmale sind im Druck unverändert wiedergegeben.

B. VAN ROOTSELAAR

BERNARD BOLZANO

MISCELLANEA MATHEMATICA

Der L[e]*hrs.*[atz] *v.*[om] *Quadr.*[at] *d*[e]*r Hyp.*[othenusa] lautet allg[e]mein: E[*i*]ne Figur üb[e]r der Hypoth.[enusa], gl[*ei*]cht am Inhalt | d[e]r Sum̄[me] 2er ähnl[*i*]ch[e]r Figur[en] üb[e]r den Katheten. Und um *dies*[e]*s* zu b[e]weis[en], | genügt es, w[enn] m̄[an] dieß nur v.[on] irg[en]d *E*[*in*e]*r* Art v.[on] Figur[en] darthut. N[un] läßt sich | dieß am Kürzesten v.[on] einem r[e]chtw.[*in*keli*g*en] Δ darthun; denn das r[e]chtw.[*in*keli*g*e] Δ üb[e]r der | Hyp.[othenusa], d.i. das r[e]chtw.[*in*keli*g*e] Δ s[e]lbst, z[e]rfällt d[u]rch ein Loth a.[*us*] d[e]r Spitze auf die Hyp.[othenusa] in ‖ 2 *ähnl*[*i*]*che* R[e]chtw[*in*keli*g*]e] Δ Δ, der[en] Hyp.:[othenusen] die K[a]th[e]t[e]n sind. A = a + b. |

Wie oft durchsch[ne]iden sich n Linien die in *Einer Ebene* liegen? | Sie können sich *1. gar nicht* d[u]rchschneiden, ind[e]m sie alle parallel. *2.* ist ab[e]r | Ein Durchsch[ni]ttsp[*un*]kt vorhand[en], so si[n]d *w*[e]*n*[*i*]*gst*[e]*ns* n–1, *höchstens* $\frac{n \cdot 1 \cdot n}{2}$ |[2] Durchschnittsp[*un*]kte vorhanden. Erst[e]r[e]s, w[enn] (n–1) Li[*ni*en] parallel, u[nd] ‖ die n^te^, w[*ei*]l sie E[*in*]e schneidet auch alle übr[*i*]g[en] d[u]r[c]hschneid[e]t. L[e]tzt[e]r[e]s | w[enn] keine d[e]r n Li[*ni*en] zu d[e]r ander[e]n parallel; da schn[*ei*]den sich also die 2 erst[en] | *1*^m[a]l^, die 3^te^ schneidet die 2 erst[en], *2*^m[a]l^; die 4^te^ die 3 vorg[e]h[en]d[en], *3*^m[a]l^ | die 5^te^ die 4 vorg[e]h[en]d[en] *4*^m[a]l^; etc. die n^te^ die (n–1) vorg[e]h[en]d[en] *(n–1) m*[a]*l.* | Also ist d[ie] Zahl d[e]r D[u]rchschn[*i*]ttsp[*un*]kte $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = n \cdot \frac{n-1}{2}$. ‖ F[e]rn[e]r si[n]d die mögl[*i*]ch[en] D[u]rchsch[*ni*]ttsp[*un*]kte bey: |

I L[*ini*]e, 0.	VI Linien; 0, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15.
II Linien, 0, 1.	VII Linien; 0, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 17,
III Linien, 0, 2, 3.	
IV Linien, 0, 3, 4, 5, 6.	‖
V Linien 0, 4, 6, 8, 9, 10	

Allgemein, 0, n–1, 2 (n–2), 2 (n–2) + 1, | 0 wenn alle n Li[nien] ∦[3] sind, n–1 w[enn] (n–1) L[*in*ien] ∦ s[*in*]d; 2 (n–2); 3 (n–3), 4 (n–4) | etc, wenn nämlich

[1] **Die von Bolzano gestrichenen Zeilen 2–4 enthalten eine von ihm als untauglich erkannte Erklärung der Ebene eines Dreiecks.**

[2] **Wahrscheinlich setzt Bolzano hier stillschweigend voraus, daß sich nicht mehr als zwei Linien in einem Punkte schneiden. Sonst wären mehrere Möglichkeiten gegeben.**

[3] **Das Zeichen »∦« bedeutet hier parallel.**

(n–2), (n–3), (n–4) L[in*ien*] ♯, u.[nd] dann 2, 3, 4, . . ab[e]rm[a]ls | [un]t[e]r sich ♯, jene ab[e]r schneiden. Dann; w[enn] die 2, 3, 4 L[in*ien*], w[e]lche die n–2, ‖ n–3, n–4, ♯len schneid[e]n; s[e]lbst [nic]ht u[n]t[e]r sich ♯, sond[e]rn e[*i*]n[a]nd[e]r 1 m[a]l, etc | schneid[en], so entsteh[en] die Anzahl[en] der D[u]rchschnittsp[*un*]kte 2 (n–2) + 1; | 3 (n–3) + 2, 3 (n–3) + 3; etc. etc. |

Geom.[etr*i*scher] *L*[e]*hrs.*[atz] Wenn in 2 Dreyecken 2 W[*in*]k[e]l gl[*ei*]che Su[mmen] | hab[en]; so s[*in*]d die Seite[n], die dies[en] 2 W.[*in*keln] entg[e]g[en]-steh[en] in gl[*ei*]ch[e]m V[e]rh[ä]lt[*ni*]sse. Dieß ‖ ist d[e]r allg[e]meine Satz

ac : bc = ad : bd

°(Richtig)° |[4]

Uib[e]*r die Formel, w*[e]*lche den Inhalt eines Dreyecks ausdrückt.* Wenn | a, b, c die 3 Seit[e]n e[*in*e]s Δ heissen, so f[*in*]d[e]t m̄[an], d[a]ß d[e]r Inhalt des Δ = 0 w[e]rde | wenn a + b – c = 0 wird, u[nd] *nur* in dies[e]m Falle. Daraus f[o]lgt | d[a]ß die Form[e]l w[e]lche dies[e]n Inhalt ausdrü[c]kt, die 3 Factoren hab[en] [mü]sse ‖ A $(a + b - c)^n \cdot (a + c - b)^n \, (b + c - a)^n$ wo n irg[en]d e[*in*]e pos.[*itive*] Zahl. – Es wird ab[e]r | der Inhalt des Δ auch = 0, wenn a + b + c = 0 ist, d.h. a = 0, b = 0, c = 0, w[e]lche | V[e]rh[ä]lt[*ni*]sse $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ im[me]r seyn mög[en]. Dieß gibt also noch den vierten | Factor $(a + b + c)^m$ wo m ab[e]rm[a]ls irg[en]d e[*in*]e pos.[*itive*] Zahl. – Kann m̄[an] da- | raus, w[*ei*]l der Inhalt sonst in k.[*ei*nem] and.[eren] Falle m[e]hr = 0 wird, schließ[en], d[a]ß es k.[*ei*nen] and[e]r[e]n ‖ v[e]ränd.[er*li*chen] Factor m[e]hr gebe; so kann m̄[an] z[u]gl[*ei*]ch schließen d[a]ß, weil der Inhalt | des Δ, die 2[te] Dimension hab[en] [mu]ß, 3 n + m – 2
2 seyn müsse. ‖

Project der Defin:[*iti*onen] *v.*[on] *Länge, Flächenraum, k*[ö]*rp*[er]*l*[*i*chem] *Inhalt.* |

Dasje[ni]ge, was m̄[an] außer der b[e]sond[e]r[e]n Lage (Ort) j[e]d[e]s ihr[e]r P[*un*]kte | an e[*in*e]r L[*ini*]e noch [un]t[e]rsch[*ei*]den kann, heißt die *Länge.* |

Dasj.[enige] –– an e[*in*e]r Fläche ––– der *Flächenraum.* ‖

Dasj.[enige] –– an e[*i*]n[e]m K[ö]rp[e]r –– d[e]r *k*[ö]*rp*[er]*l*[*i*che] *Inhalt.* | °(dieß finde ich g[e]g[e]nw.[*ärtig*] Apr[i]l 1814. unrichtig)° (etwa Decemb[e]r 1803.) |

Was die Sprachlehre f.[*ür*] die Erl[e]rn[*u*]ng e[*in*e]r Spr[a]che ist: das ist d[*ie*] Logik f.[*ür*] das richt[*i*]ge D[e]nk[e]n | Wie z[u]r Spr[a]ch[e] *Uib*[*un*]*g* nöth[*i*]g

[4] **Wahrscheinlich später (1814?) hinzugefügt. Vergl. MM 2, Zeile 6.**

ist, so ist auch z.[*um*] D[e]nk[en] Logik all[ei]n [nic]ht hinr[*ei*]ch[en]d | Di[e]
b[e]ste Uib[*un*]g gibt d[ie] M[a]th[e]matik. ‖

Geom.[etrischer] *L*[e]*hrs.*[atz]. Die kürz[e]st[e] L[*ini*]e, so sich zw[*i*schen] 2 L[*ini*en], die sich [nic]ht d[u]rchschn[*ei*]d[en] | z[i]eh[en] läßt, ist die].[*eni*ge], die auf beyd[en] s[e]nkr.[echt] steht. *B*[e]*w*[*ei*]*s*: p.[er] abs.[urdum] D[enn] w[enn] | e[*in*]e [nic]ht s[e]nkr[e]cht steht, u[nd] m̄[an] zieht e[i]n Loth, so [mu]ß d[*ie*]s[e]s kürz[e]r seyn. |

Alle g[e]broch[e]n[e]n *o*[der] g[e]r[a]d[e]n L[*ini*en], die aus e[inem] P.[*un*kte] *E*[*in*e]*r* Eb[en]e in P[*un*]kt[en] | e[*in*e]r and[e]r[e]n jen[e]r parallel so gezog[en]
s[*in*]d, d[a]ß sie üb[e]rall e[*in*e]rl[*ei*] ‖ Neig[un]g g[e]g[en] jene Eb[ene] b[e]-halt[en] – s[*in*]d v[on] gl[*ei*]ch[e]r Länge. – |[a]

Mathesis universalis, cujus objectum abstracta quantitas. Mathesis specia-|lis, cujus objectum speciale quoddam quantorum genus; inter quae spatium emi-|net, cuj.[us] Scientia Geometria audit.[ur] °(J[e]tzt bin ich and[e]r[e]r M[*ei*]-n[*un*]g Apr.[*il*] 1814)° |[5]

Die evidentere, geläuf[*i*]g[e]re Proposition ist [nic]ht i m̄[me]r die obere, u.[nd]
d[e]m Gr[un]d-‖g[e]setze nächste. M.[an] [mu]ß also die G[e]läuf[*i*]gk[*ei*]t zu k.[*ei*nem] K[e]nnz[*ei*]ch[en] e[*in*e]s Axioms machen. | (Sond.[ern] d[ie] Unb[e]-w[*ei*]sb[a]rk[*ei*]t d[e]ss[e]lb[en] d[u]rch j[e]d[en] and[e]r[e]n Satz.) Die Ur-s.[ache] d[*ie*]s[e]r Erschei[nu*n*]g ist, | w[*ei*]l die G[e]läuf[*i*]gk[*ei*]t, d[ie] Perspi-cuität *o*[der] Evid[en]z e[*in*e]s Satzes vorn[e]hml[*i*]ch dav.[on] | abhängt, ob wir dens[e]lb[en] b[e]reits oft *o*[der] selt[en] g[e]dacht haben. Nu[n] denk[en] wir u[n]s d[ie] erst[en] | Prinzipi[e]n selt[en], d[*ie*] abg[e]leitet[e]n Sätze ab[e]r
häuf[*i*]g[e]r; f[o]lgl[*ich*] w[e]rd[en] u[n]s *d*[*ie*]*se* oft g[e]läuf[*i*]g[e]r seyn. ‖ Die Evidenz *o*[der] Perspicuität ist aus eb[en] d[*ie*]s[e]r Urs.[ache] auch b.[*ei*] v[e]r-sch[*ie*]d[enen] M[ensc]h[en] gar [nic]ht e[*in*e]rl[e]y; | denn es kom[m]t d[a]r[au]f an, wie oft d[*ie*]s[e]r *o*[der] j[e]n[e]r v[e]rm[ö]ge s[e*in*e]r Lage v[e]ranlaßt wor-d[en], e[*in*]e | g[e]wisse W[a]hrh[*ei*]t zu observir[en]. D[e]r Satz: Ein j[e]d[e]r K[ö]rp[e]r kann um 2 P[*un*]kte dess[e]lb[e]n g[e]dr[e]ht | w[e]rd[en] – wird den

[a] **Am Vorderrande geht eine Vertikallinie von Z. 13 bis Z. 15.**

[5] **Später hat Bolzano sich wieder dieser traditionellen Erklärung der Mathematik angeschlossen.**

meist[en] M[ensc]h[en] einleucht[en]d[e]r seyn, als f[o]lg[en]d[e]r g[e]wiß oberer Satz: | zu 2 P[un]kt[en] gibt es ∞ viele P[un]kte in gl[ei]ch[e]r Lage zu dens[e]lb[en]. Unt[e]r jen[e]r Form ist näml[ich] ‖ der Satz oft erfahr[en] wor- 30
d[en]. D[a]ß die Hyp[o]th.[enusa] > Kath[e]t[en] ist viel[en] M[ensc]h[en] völl[i]g eb[en] so | evident, als d[a]ß das Ganze > Th[ei]le o[der] sonst ein so g[e]nannt[e]s Axiom! etc. etc. ‖ 34

Nachdem m̄[an] die Def[i]n:[itionen] d[e]r B[e]griffe: Entf[e]r[nun]g u[nd] R[i]cht[un]g (eb[en] so b.[ei] and[e]r[e]n Def:[initionen]) ge-‖geb[en], so ist die 35
erste Frage: Wann kann m̄[an] sag[en], d[a]ß 2 g[e]wisse Entf:[ernungen] o[der] | Richt[un]g[en] einand[e]r *gl[ei]ch* o[der] *ungl[ei]ch* s[in]d? vor der[en] Beantw.[ortung] kaum einige L[e]hrs:[ätze] | üb[e]r solche B[e]griffe mögl[i]ch s[in]d. Zugl[ei]ch ist zu m[e]rk[en], d[a]ß m̄[an] d[ie] Beantw.[ortung] d[ie]s[e]r | Frag[en] so einricht[en] [mü]sse, d[a]ß die a priori g[e]ford[er]te Mögl[i]chk[ei]t e[ine]s mathe[ma]t[i]sch[en] | a prior[i]sch[en] Erk[enn]t[ni]ss[e]s vorausg[e]setzt w[e]rde. ‖ 40

Ein j[e]d[e]r reell[e]r B[e]griff muß so b[e]schaff[en] seyn, d[a]ß m̄[an] [nic]ht [nu]r s[ein]e Gl[ei]chh[ei]t *annehm*[e], | sond.[ern] auch auf s[ein]e Gl[ei]ch-h[ei]t aus g[e]wiss[en] and[e]rn ang[e]no[mmenen] Umst[änd]e[n] z[u]r[üc]*k-schließ*[en] | kö[nn]e. Denn sonst wäre k.[eine] a prior[ische] Erk[enn]t[ni]ß v.[om] Raume mögl[i]ch. – Nur | dann auf Gl[ei]chh[ei]t d[e]r Entf.[ernung] der 2 P.[unkte] *a*, *β* m[i]t der der 2 P.[unkte] a, b schließ[en], w[enn] *a*, *β* | mit a, b e[ine]rley s[in]d: ist [nic]ht hinlängl[i]ch; de[nn] dieß ist *Ein*[e]*rleyh*[ei]*t* d[e]r Entf[ernung] u[nd] [nic]ht ‖ *Gl*[ei]*chh*[ei]*t*. Es gibt ab[e]r auch *Gl*[ei]*ch-h*[ei]*t* in d[e]r Entf[e]r[nun]g. | 45

[W]as *bestimmend* ist, [mu]ß auch *bestim*̄[m]*bar* seyn. | (F[a]lsch. Das hiesse,
w[a]s Urs.[ache] ist [m]uß auch W[i]rk[un]g s.[ein], o[der] Gott?) ‖[6]
Es gilt f[o]lg[e]nd[e]r Satz, w[e]lch[e]r die *Richtu*[n]*g* bloß d[u]rch *Entf*[ernun]-*g*[en] b[e]stim[m]t (doch mit | Zweydeut[i]gk[ei]t). "W[enn] d[e]r P.[unkt] m so liegt, d[a]ß s[ei]ne Entf[e]r[nun]g[e]n v.[on] den 2 P[un]kt[e]n a, b | ihn *bestimmen* (d.h. keinem and[e]r[e]m P[un]kte, als ihm allein zukommen | kön-nen): so ist die Richt[un]g v.[on] m zu a entw[e]d[e]r ein[e]rley mit ab, o[der] der ‖ R.[ichtung] ab entg[e]g[enge]s[e]tzt.., |
B[e]*merkung*: Die Angabe 2er *Richtungen* zu den P[un]kt[en] a, b b[e]stim̄[m]t den P[un]kt m, w[enn] diese | Richtungen, [nic]ht ab, ba sind, d.h. [ni]cht d[u]rch

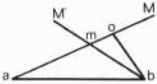
[6] **Wahrscheinlich später hinzugefügt.**

a, b s[e]lbst b[e]stim̃[m]t w[e]rden: Die Anga-|be 2er *Entf*[e]*rnungen* von den P[*un*]kte[n] a, b b[e]stim[m]t den P[*un*]kt m, eb[en] dann | wenn dies[e]r P[*un*]kt in der Ri[c]ht[*un*]g ab, *o*[der] ba liegt. Auf solche Weise theil[en] sich Entf.[ernung] ‖ u.[nd] Richt[un]g in die B[e]stim̃[mun]g des P[*un*]kt[e]s m, so d[a]ß, wo die E[*i*]n[e]n [nic]ht auslangen, | die And[e]r[e]n b[e]stim̃[m]ende Kr[a]ft erhalten. ‖

I. Wenn die Entfernungen des P[*un*]kt[e]s m v.[on] a, b ihn bestim̃[m]en, (d.h. w[enn] v.[on] ihn[en] ‖ ausg[e]sagt wird, d[a]ß sie keinem and[e]r[e]m P[*un*]kte außer m zukom̃[men] kö[nnen]), | so sind die R[*i*]cht[*un*]gen am, bm entw.[e]-d[e]r *einerley* mit ab, ba od[e]r | w[e]rd[en] doch d[u]rch sie b[e]stim̃[m]t (d.h. si[n]d entg[e]g[enge]s[e]tzt). *B*[e]*w*.[*eis*] F[o]lgt sehr leicht. |

Sagt man, daß die Entf[e]r[nun]g[en] auch ferner *gleich* sind, am = bm; so si[n]d | die R[*i*]cht[*un*]g[en] am, bm vollends b[e]stim̃[m]t, näml[*i*]ch [nu]r *ein*[e]*rley* mit ab, ba. – ‖ Ich kenne kein[en] and[e]r[e]n Fall, dies[e]r volko[m-menen] B[e]stim̃[mun]g, solang m̃[an] die | Entf[e]r[nun]g[e]n bloß als Qualitäten b[e]trachtet. |

II. Wenn der P[*un*]kt m d[a]d[u]rch bestim[m]t wird, d[a]ß er sich in g[e]wis-s[en] R[*i*]cht[*un*]g[en] (puta aM, bM′) od[e]r | in ihren entg[e]g[en]g[e]s[e]tzten befindet: | so bestim̃[men] die Entf[e]r[*nun*]g[en] am, bm den P[*un*]kt m [nic]ht; u[nd] die R[*i*]cht[*un*]g[en] am, ab; ‖ bm, ba s[*in*]d w[e]d[e]r [*ei*]n[e]rl[*ei*] noch entg[e]g[enge]s[e]tzt; sond.[ern] E[*in*]e b[e]stim[m]t die And[e]re nicht. |



Bew[*eis*]. 1, Denn g[e]setzt die R[i]cht[*un*]g[e]n aM, ab | wär[en] ein[e]rley *o*[der] entg[e]g[enge]s.[etzt]; so | wär[en] es erweisl[*i*]ch[e]rmaßen auch bM′, ba. M.[an] g[e]denke [nun] | in aM, *o*[der] der ihr entg[e]-g[enge]s[e]tzt[en] irg[en]d e[*in*]en P[*un*]kt o, so s[*in*]d auch die R.[*ichtung*en] bo, | ba e[*in*e]rl[*ei*] *o*[der] entg[egengesetzt]. Also bo, bM′ e[*in*e]rl[ei] *o*[der] entg[e]g[enge]s[etzt]. Mithin ist nebst m, auch ‖ o ein P[*un*]kt, der in den R[*i*]cht[*un*]g[e]n aM, bM′ od[e]r ihr[em] entg[e]g[enge]s[e]tzt[e]n liegt. F[o]lgl[*i*]ch | wird m d[u]rch diese B[e]ding[un]g [nic]ht b[e]stimmt. Also ist die R.[*ichtung*] aM [mi]t ab [nic]ht ein[e]rl[*ei*] *o*[der] entg[egengesetzt]. | 2. Mithin nach I modo toll.[endo] kö[nnen] auch die Entf.[er*nungen*] des P[*unktes*] m v.[on] a, b ihn [ni]cht be-|stim̃[m]en. |

Raisonnement: Der n[e]bst d[e]m P[*un*]kte a g[e]g[e]b[e]ne zweyte P[*un*]kt b bestimmt die R.[*ichtung*] ab ‖ in der er zu a liegt. Ich b[e]haupte nun, d[a]ß *es mögl*[*i*]*ch seyn* [mü]*sse*, *d*[u]*rch bloße* | *Entf*[e]*r*[*nun*]*g*[e]*n* v.[on] *a u*[nd] *b ein*[en] *P*[*un*]*kt zu b*[e]*stim̃*[m]*en*, *dess*[en] *R*.[*ichtung*] *mit der R*.[*ichtung*] *ab entw*.[eder]

e[ine]rl[ei] *o*[der] | *entg*[e]*g*[enge]*s.*[etzt] *ist.* Denn die beyd[e]n P[*un*]kte, a, b b[e]stim̃[men] die R.[*ichtung*] ab, u.[nd] ihre entg[e]g[enge]s[e]tzte. F[o]lg-l[*ich*] | [mu]ß die g[e]g[e]bene *Entf.*[ernung] *e*[*ine*]s *P.*[*un*ktes] von a u.[nd] die B[e]ding[un]g, d[a]ß er sich in d[e]r R.[*ichtung*] ab *o*[der] ihr[e]r | entg[e]g[enge]s.[etzten] b[e]finde, dies[en] P.[*un*kt] b[e]stim̃[men]. Die 2te B[e]ding[un]g ab[e]r, nämli[*i*]ch d[ie] R[*i*]cht[*un*]g, [mu]ß sich ‖ auch noch d[u]rch irg[en]d [ei]ne *o*[der] m[e]hr[e]re *Entf.*[ernungen] b[e]stim̃[men] lass[en]. Denn w[enn] es [nic]ht mögl[*i*]ch wäre, | *d*[a]*ß g*[e]*wisse Entf*[e]*r*[*nun*]*g*[en] *e*[*in*]*e R*[*i*]*cht*[*un*]*g b*[e]*stim̃*[men], *so wäre R.*[*ichtung*] *etw*[a]*s* [nu]*r bestim̃*[m]*en d*[e]*s, u*[nd] | *nie s*[e]*lbst B*[e]*stim̃*[m]*bares.*) Die allein[*i*]ge Entf.[ernung] v.[on] a kann nun k.[eine] *R*[*i*]*cht*[*un*]*g* b[e]sti[mmen], w[ei]l | sie sonst den P[*un*]kt m *ganz* b[e]stim̃[m]te. – Da wir [nun] n[e]bst d[e]m P.[*un*kte] a nur noch den b | haben, – als w[e]lche beyde, n[e]bst d[e]r g[e]g[e]b.[enen] Entf.[ernung] des zu b[e]stim̃-[men]den P.[*un*kts] v.[on] a, u[nd] d[e]r B[e]ding[un]g ‖ s[e*i*ne]r Lage in d[e]r R.[*ichtung*] ab, zu s[e*i*ne]r B[e]stim̃[m*un*]g völl[*i*]g hinreichen –; so f[o]lgt, d[a]ß die zu d[e]r | g[e]g[e]b.[enen] Entf.[ernung] v.[on] a noch hinzug[e]-nom̃[m]ene B[e]ding[un]g s[e*i*ne]r Entf.[ernung] v.[on] b den P[*un*]kt m b[e]-stim̃[men] [müsse; | weil sich m[e]hr[e]re als diese 2 *Entf*:[ernungen] [nic]ht wahrnehm[en] lassen. |

Nervus probandus ist die Folg[e]r[un]g: Weil die 2 P[*un*]kte a, b hinreich[en] den P[*un*]kt m zu | b[e]stim̃[men]; so [mü]ssen auch die *Entf*[e]*r*[nun]*g*[en] (die sich hi[e]r wahrnehm[en] lass[en]) allein hinreich[e]n. ‖ Allein die *R*[*i*]*cht*[*un*]-*gen* th[u]n es [nic]ht. Und wo es die R[*i*]cht[*un*]g[en] th[u]n, th[u]n es [nic]ht
4 die Ent-|fernungen. ‖

V.[om] *Schuerp*[un]*kt*, *Mittelp*[un]*kt* (in geom.[etrischer] Hinsicht). Es gilt d[e]r allg[e]m[ei]n[e] | Satz: Zu jedem Systeme v.[on] Punkten gibt es Einen P[*un*]kt v.[on] d[e]r | B[e]sch[a]ff[en]h[ei]t, d[a]ß er aus alle[n] P[*un*]kt[en] des Systems, in jed[e]r b[e]lieb[*i*]g[en] Ord[n*un*]g auf e[*ine*]r|ley Art b[e]stim[m]t w[e]rd[en] kann. # ‖ (# D[ie]s[e]r P[*un*]kt [mu]ß [nic]ht i[mme]r d[e]r *Schw*[e]*rp.*[unkt] 11
seyn.) ‖ 4

Wie ließe sich dieß allg[e]mei[n] b[e]weis[en]? ‖ Daß es zu 2 P[*un*]kt[en] ein[en] 5
Mitt[e]*lp*[*un*]*kt* gibt, d.h. e[*inen*] P[*un*]kt, der aus beyd[en] auf gl[*ei*]che Art | b[e]stim[m]t wird, ist ein höchst wicht[*i*]g[e]r Satz, den ich ab[e]r ni[c]ht h[e]r-ausbring[en] | kann. Noch am scheinbarsten ist *der* Schluß: Wenn k.[ein] P[*un*]kt c mögl[*ich*] | seyn sollte, der in dem Systeme d[e]r 2 P[*un*]kte a, b eb[en] so aus a b[e]stim[m]t | w[e]rden kö[nn]te, als aus b: so [mü]ßte doch ein *Gr*[un]*d* d[*ie*]s[e]r Unmögl[*i*]chk[*ei*]t vor‖handen seyn, d[*ie*]s[e]r [mü]ßte in [*ei*]n[e]r 10

Ungl[*ei*]*chh*[*ei*]*t* d[e]r P[*un*]kte a, b lieg[en], w[*ei*]l sonst | [nic]hts in dem Systeme ist. - a c b |

Ang[e]nomm[en] die Realität des Mitt[e]lp[*un*]kt[e]s, so f[o]lgte zugl[*ei*]ch die Mögl[*i*]chk[*ei*]t | *entg*[e]*g*[enge]*s*[e]*tzt*[e]*r* *R*[*i*]*cht*[*un*]*g*[en], denn die R[*i*]cht[*un*]g[en] ca, cb kö[nnen] [nic]ht *ein*[e]*rley* seyn, w[ei]l | sonst a, b e[*ine*]rl.[*ei*] P[*un*]kt wär[e]n. (Da die Entf.[ern*ung*] ac = bc). Ab[e]r ‖ doch [mu]ß die E[*in*]e die And[e]re b[e]stim̄[men], weil d[e]r P[*un*]kt c sonst [nic]ht | *b*[e]*stim̄*[m]*t* wäre; f[o]lgl[*i*]ch s[*in*]d sie das, was m̄[an] *entg*[e]*g*[enge]*s*[e]*tzte* R:[*ich*t*ung*en] heißt. |

Bestimmt heißt im G[e]g[en]satz v.[on] *Gegebe*[n], was aus Gegeb[e]nem so folgt, d[a]ß es | nicht Ander[e]s seyn kann. |

D[e]r geom.[etr*isch*e] L[e]hrsatz: W[enn] die Seit[en] e[*ine*]s △ ungl[*ei*]ch, so s[*in*]d auch die W.[*in*kel] an d[e]r G*r*[*un*]dl[*i*]n[*ie*] ungl[*ei*ch] ‖ gilt nicht in dem Falle, w[enn] der eing[e]schloss[e]ne W.[*in*kel] = 2R ist. Sein *B*[e]*w*[*ei*]*s* [mu]ß also v.[on] dies[em] | Falle abgeh[e]n. °(Richtig)° | [7]

Ich versuchte zu b[e]weis[e]n, d[a]ß w[enn] die P[*un*]kte m, n in d[e]rs.[e]lb[en] R[*i*]cht[*un*]g aA lieg[en]: die W:[*in*kel] bey m, n [ni]*cht gl*[*ei*]*ch* seyn kö[nnen] (woraus f[o]lgte, d[a]ß d[e]r E[*in*]e W.[*in*kel] d[e]r Ein[e]rleyh[ei]t, d[e]r and[e]re d[e]r Entg[e]g[ensetz*ung*] | sey) Mitt[e]ls des Gr[un]dsatz[e]s: *W*[enn] *sich in* *E*[*in*em] *Syst*.[em]e *1 Stü*[c]*k änd*[e]*rt etc.* - . a m n A ‖ Das Syste[m] man hat die b[e]stim̄[m]enden Stü[c]ke: *1.* den P[*un*]kt a, 2. die R[i]cht[*un*]g aA; | *3.* Die Entf[e]r[n*un*]g[e]n am, an in derselben *4.* Die Annahme des E[*in*en] d[e]r beyd[en] P[*un*]kt[e], | m, n zum *Ersten*, u.[nd] des And[e]r[e]n zum *Zweyten*. – Aend[e]rt man [nun] | das 4*te* Stü[c]k: so wird das Syst[e]m man in das nam v[e]rwandelt. Also | [mu]ß in den b[e]stim̄[m]t[en] Stü[c]k[en] beyd[e]r System[e] e[*in*]e V[e]ränd[e]r[*un*]g seyn. Diese ‖ b[e]stim̄[m]t[en] Stü[c]ke s[*in*]d l[e]d[*i*]gl[*i*]ch die 2 W[*in*]k[e]l bey m, n. Also [mü]ss[e]n die 2 W.[*in*kel] | m, n den 2 W.[*in*keln] n, m [nic]ht gl[*ei*]ch seyn; d.h. m [nic]ht = n. |

G[e]*danke üb*[e]*r die Def*:[*in*i*t*ionen] *v*.[on] *Entf*[e]*r*[nun]*g u*[nd] *Richt*[un]*g*. Wie w[enn] m[an] die R[*i*]cht[un]g völl[*i*]g wegwärfe | u.[nd] *Entf*[e]*r*[nun]*g* als dasj[e]n[*i*]ge definirte, das an 2 P[*un*]kt[en] f.[*ür*] sich zu b[e]m[e]rk[en] ist;

[7] **Wahrscheinlich später hinzugefügt.**

u.[nd] d[a] | zu den B[e]griff des *Wink*[e]*ls* nähme, der das wäre, so die Entf[e]r-[*nun*]g 2er ‖ P[*un*]kte a, b, der[e]n Entf[e]r[nun]g[e]n v[on] dem $\bar{3}^{t[en]}$ c g[e]g[e]- b[en] s[*in*]d, b[e]stim̄[m]t?

So folgete also: w[enn] die Entf:[ern*un*gen] ca = γa, cb = $\gamma\beta$, u.[nd] d[e]r W.[*in*-kel] acb = $a\gamma\beta$, d[a]ß | auch ab = $a\beta$. Und umg[e]k[e]hrt: wenn ab = $a\beta$; d[a]ß auch ∠ acb = ∠ $a\gamma\beta$. | (Weil es willk.[*ürlich*] ist, wie m̄[an] e[inen] B[e]griff aufstellt, o[der] w[*ei*]l m̄[an] sonst k.[*eine*] and[e]re | Vorst.[*ellung*] v.[on] W[*in*]k[e]l hat. o[der] b[e]ss[e]r quia definitum suae definitioni aequiva ‖ let.) |

Defin.[*ition*] *einer continuirlichen Linie.* |

E[*in*]e L[*ini*]e heißt continuirl[*i*]ch, w[enn] sie die B[e]sch[a]ff[en]h[*ei*]t hat, d[a]ß zu j[e]d[e]m P[*un*]kte o den | m̄[an] in derselben annim[m]t, in j[e]d[e]r Entf[e]r[nun]g n×r ein P[*un*]kt ein P[*un*]kt ge-|hört; wenn sich in der Entf[e]r[nun]g r ein P[*un*]kt findet, und n irg[en]d e[*in*]e pos.[*itive*] ‖ Zahl < 1 ist. Od[e]r: Deutl[*i*]ch[e]r: E[*in*]e *cont.*[*inuierliche*] *L*[*ini*]*e* geht d[u]rch a u[nd] b wenn | zu j[e]d[e]r Entf[e]r[nun]g, w[e]lche kl[*ei*]n[e]r als die Entf.[er-nung] des P.[*un*ktes] m von n ist; ein | P[*un*]kt *zu m* zu finden ist; wo m, n irg[en]d w[e]lche 2 P[*un*]kte d[*ie*]s[e]r L[*ini*]e sind | (Fig. 1. Fig. 2 zeig[en], d[a]ß d[ie] B[e]ding[un]g *zu a allein*, o[d[e]r zu a | *u*[nd] *b* [nic]ht hinreicht.) ‖

Fig. 1

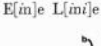


Fig. 2

Einige Definitionen. (u[nd] Lehrsätze). |

Ein Punkt o liegt zwischen 2 P[*un*]*kt*[e]*n a, b* (Dieß in einem allg[e]mein[e]ren | Sinne g[e]nom[men], als in d[e]r g[e]dru[c]kt[en] Abhandl[*un*]g[8]) wenn ein Loth aus o auf die | g[e]r[a]de L[*ini*]e ab, inn[e]rh[a]lb a, b einfällt. °(Ist g.[emäß] d[em] Spr[a]chg[e]br[au]ch)° ‖ [9]

Ein P[un]*kt o liegt zwischen zwey Ebenen, o*[der] *Flächen* w[enn] e[*in*]e L[*ini*]e d[u]rch ihn | so g[e]zogen, bis sie beyde Flächen d[u]rchschneidet, o inn[e]rh[a]lb d[e]r D[u]rch-|sch[*ni*]ttsp[*un*]kte liegt. °(Ist richtig, ab[e]r m[e]hr *L*[e]*hrs.*[atz] als *Erkl.*[*ärung*])° |[10]

[8] **Gemeint ist wohl die Abhandlung: *Betrachtungen über einige Gegenstände*, Prag 1804.**

[9] **Wahrscheinlich später hinzugefügt.**

[10] **Wahrscheinlich später hinzugefügt.**

Eine Ebene (o[der] Fläche) *liegt zwischen zwey Punkten*, wenn die d[u]rch sie | g[e]zogene g[e]r[a]de L[*ini*]e, die Eben[e], *o*[der] Fläche in e[inem] P[*un*]kte d[u]rchschneidet, der ‖ inn[e]rh[a]lb jener liegt, *o*[der] E[*in*]e Eb[e]ne zw.[*i*schen] a, b ist e[*in*]e Eb[en]e, w[e]lche d[u]rch e[inen] P[*un*]kt d[e]r g[e]r[aden] L[*inie*] ab geht. |

L[e]*hrs.*[atz] Wenn d[u]rch a u[nd] b e[*in*]e cont[*inuierliche*] L[*ini*]e geht, so muß jede (ins unb[e]sti$\bar{m}$[m]te erweit[e]rte) *Eb*[e]*ne*, die $\bar{m}$[an] | zwischen a, u.[nd] b legt, w[e]n[*i*]gst[en]s 1 P[*un*]kt [mi]t d[e]r cont.[*inuierlichen*] L[*ini*]e g[e]mein haben. |

B[e]*weis. Ist mir z*[u]*r Stunde unbekannt.* | [11]

Umg[e]*k*[e]*hrt*[e]*r L*[e]*hrs.*[atz] Wenn in j[e]d[e]r Eb[e]ne, die $\bar{m}$[an] zwisch[en] a, b leg[en] kann, *Ein* P[*un*]kt ‖ liegt, so geht d[u]rch a u[nd] b e[*in*]e contin.[*uierliche*] Linie. (Viell[*ei*]cht auch noch etw[a]s an-|der[e]s, ab[e]r g[e]wiß doch auch e[*in*]e cont.[*inuierliche*] L[*ini*]e). *F*[a]*lsch.* |

L[e]*hrs.*[atz] D[u]rch jed[en] g[e]g[e]b[enen] P[un]kt m läßt sich e[*in*]e Eb[e]ne die zw[*i*]sch[en] den 2 P[*un*]kt[en] a, b d[u]rch geht | legen; w[enn] [nu]r m [nic]ht in der g[e]raden L[*inie*] d[u]rch a, b liegt. *B*[e]*w*[*ei*]*s.* M.[an] nehme inn[e]rh[a]lb | der 2 P.[*un*]kte a, b irg[en]d e[inen] P[*un*]kt o,

d[u]rch o, m läßt sich e[*in*]e Eb[e]ne ‖ leg[en]; diese geht *zw*[*i*]*sch*[en] den P[*un*]kt[en] a, b. – Also kann man | mitt[e]lst Eb[e]nen zw[*i*]sch[en] 2 g[e]g[e]b[enen] P[*un*]kt[en] a, b zu j[e]d[e]m P[*un*]kte des Raum[e]s ge-|lang[en], ausg[e]no$\bar{m}$[men] zu e[inem] P.[*un*]kte] der in d[e]r g[e]r[aden] L[*inie*] ab liegt. |

Anm.[erk*ung*] Heißt man (u[nd] dieß gilt stricto sensu, nach d[e]r g[e]g[e]b[enen] Def.[*inition*]) auch e[*in*]e | Eb[e]ne, die *d*[u]*rch* a, b s[e]lbst geht, e[*in*]e Eb[e]ne zw[*i*]sch[en] a, b weil sie auch d[u]rch ‖ e[inen] P[*un*]kt zw.[*i*schen] a, b geht: so fällt auch die g[e]machte Ausnahme hin-|weg. |

Lehrs.[atz] W[enn] d[u]rch a, b e[*in*]e cont.[*inuierliche*] L[*ini*]e geht, so müssen sich in j[e]d[e]r Eb[e]ne, | die $\bar{m}$[an] wie i$\bar{m}$[me]r *d*[u]*rch die 2 P*[*un*]*kte* a, b legt – (*o*[der] in j[e]d[e]r Lage, in die $\bar{m}$[an] e[*in*]e | d[u]rch ab geh[en]de Eb[e]ne um ab drehen kann) – 0, 2, od[e]r 2n P[*un*]kte der ‖ contin.[*uierlichen*] L[*ini*]e befinden. |

U.[nd] *Umgekehrt.* (E[*in*]e sond[e]rb[a]re B[e]haupt[un]g.) |

---

[11] **Der Beweis dieses Satzes ließe sich bei richtiger Erklärung der stetigen Kurve unter Verwendung des sogenannten Bolzano'schen Satzes (siehe *rein analytischer Beweis*) führen. Vgl. auch Fußnote 13 auf S. 34.**

Die *Zeit* hat [nu]r E[*in*]e Dimension. Es gibt [nic]ht v[e]rsch[*ie*]dene Aug[en]-bli[c]ke *zugl*[*ei*]*ch*. | Das V[e]rsch[*ie*]d[e]ne, was zugl[*ei*]ch ist, ist – *Raum*. Die Zeit kann [nu]r auf ein[e]rley | Art v[e]rb[un]d[en] w[e]rd[en]. E[*in*]e Zeitdauer also, die e[*in*]e[r] and[e]r[e]n, an d[e]r *Größe* (M[e]nge ‖ gl[*ei*]ch[e]r Th[*ei*]le) gl[*ei*]ch ist – ist ihr auch *völl*[*i*]*g gl*[*ei*]*ch*. (gl[*ei*]ch *u*.[nd] ähnl[*i*]ch). Od[e]r es ist gar | k.[*ein*] inn[e]r[e]r Unt[e]rsch[*ie*]d [un]t[e]r ihn[en]. Bloß *ihr Ort*, ihre Stelle in d[e]r (allg[e]m[*ei*nen]) Zeit | ist v[e]rschied[en]. Dag[e]g[en] ein Raum, der einem And[e]r[e]n an d[e]r *Größe* gl[*ei*]ch ist, | ist ihm darum [nic]ht schon in All[e]m gleich. |

An e[*in*]e[r] *Zeit* ist bloß zweyerley: ihre *Größe* (Dauer) u[nd] ihre *Stelle* (Ort) zu ‖ [un]t[e]rscheiden. An einem *Raum* (räuml[*i*chen] Dinge) ab[e]r ist 4 rl.[*ei*] zu u[n]t[e]rsch[*ei*]d[en] | *1*. Dess[e]n *Größe* (kub[*i*]sch[e]r, Flächen, o[der] Läng[e]ninhalt) *2*. Dess[en] *G*[e]*stalt*. *3*. *Lage* (der[e]n | Gl[*ei*]chh[ei]t dann stattfind[e]t, w[enn] alle Li[*ni*en] des Ein[en] räuml[*i*chen] Ding[e]s den gl[*ei*]ch-nahm[*i*]g[en] in d[e]m And[e]r[e]n | # laufen) *4*. *Ort* o[der] Stelle. – Lage u.[nd] Ort unt[e]rscheide ich bloß m[e]hr[e]r[e]r Voll-[ständ[*i*]gk[*ei*]t wegen. ‖

Hiernach lassen sich f[o]lg[en]de Sätze aufstellen: *Wenn in 2 Räuml*[*i*chen] *Dingen* |

Gleich sind		so ist nothw[endig] gleich		willkührlich	
	1. L.		G[e]st.		Gr. O.
	2. G[e]st.		–		Gr. L. O.
	3. Gr.		–		G[e]st. L. O.
	4. Gr. G[e]st.		–		L. O.
	5. Gr. L.		G[e]st.		O.
	6. O.		Gr. G[e]st. L.		–

Nicht gleich sind		so ist nothw[endig] nicht gleich		willkührlich	
	1. L.		O.		Gr. G[e]st.
	2. G[e]st.	L. O.			Gr.
	3. Gr.	O.			G[e]st. L.
	4. Gr. G[e]st.	L. O.			– ‖
	5. Gr. L.	O.			G[e]st.
	6. O.	–			Gr. Gest. L. ‖

Wo Gr = Größe | G[e]st = G[e]stalt, L = Lage | O = Ort (: Mit ‖ 6 hätte Anfang ge-|macht w[e]rd[en] kön[nen]:) ‖

Diese Sätze sind ab[e]r v.[on] keinem groß[en] W[e]rthe. |
Ich b[e]schäft[*i*]ge mich mit den Definitionen d[e]r B[e]griffe. |
D[e]r *Ort* ist das räuml[iche] Ding s[e]lbst, insofern m̄[an] es mit irg[en]d einem And[e]r[e]n | v[e]rgleichet u.[nd] den[e]n[*i*]g[en] Unt[e]rsch[*ie*]d b[e]m[e]rket, der jenem Räuml[*i*chen] Dinge in V[e]rgl[*ei*]ch ‖ [mi]t einem *And*[e]*r*[e]*n*

allm[a]l zuko[mmen] [m]uß, so lange d[ie]ses v[on] j[e]nem *V*[e]*rschi*[e]-|*den* – [ni]cht *Ein*[e]*rley* Ding ist. |

Die *Lage* b[e]st[e]ht in der Richt[un]g, w[e]lche die Th[ei]le e[ine]s räuml[ichen] Ding[e]s im absol.[uten] Weltraum ha-|ben. (Was Kant *Gegend* nennt.) *Gl*[ei]*che Lage*, w[enn] d[ie]se | Richt[un]g[e]n parallel. ‖

Gestalt ist d[e]r Inb[e]griff all[e]r derj[e]n[i]g[en] B[e]stim̄[mun]gen o[der] M[e]rkm[a]le, w[e]lche | aus d[e]r V[e]rgl[ei]ch[un]g d[e]r Th[ei]le e[ine]s Dinges *unter sich* – ohne V[e]rgl[ei]ch[un]g [mi]t ein[em] | Dinge außer ihm, erkannt werden. |

Größe kann in 2erley Sinn genommen werden; wie dieß | *Schultz* zeigt; obgl[ei]ch nicht sehr deutlich. ‖

Im *weiter*[e]*n Sinne* ist *Größe* soviel als das *Ganze*; o[der] ein Ding h[eißt] | Größe, w[enn] es b[e]trachtet wird als ein Ganzes v.[on] m[e]hr[er]en (u[n]t[e]r sich ungleich[en]) | Th[ei]l[en] z.B. das Haus, w[e]lch[e]s aus Mauern *u.*[nd] Dach besteht. |

Wenn ab[e]r die Th[ei]le *gl*[ei]*ch* sind, u.[nd] m̄[an] ihre Anzahl zählt; so ist die|j.[enige] Eig[en]sch[a]ft | des Dinges A, die m̄[an] d[a]d[u]rch erk[e]nnt, d[a]ß m̄[an] die B[e]sch[a]ff[en]h[ei]t eb[en] j[ene]r Th[ei]le (des ‖ *Maaßes*) kennet, u.[nd] die Anzahl d[e]rs[e]lb[en] weiß, die *Größe im eng*[e]*r*[e]*n*, im | *eig*[en]*t*-*l*[*i*]*chen Sinn* des W[o]rt[e]s. °(Das ist bloß *ext*[e]*ns*[*i*]*ve Größe*) |

Zwey Dinge si[n]d also v.[on] *gl*[ei]*ch*[e]*r Größe*, w[enn] sie aus gl[ei]ch[e]n Th[ei]len zus[a]m[men]g[e]s[e]tzt ang[e]seh[en] | w[e]rd[en] kön[nen]. |

Ein jedes der G[e]stalt u[nd] Größe nach g[e]g[e]benes räuml.[iche] Ding braucht z[u]r ‖ B[e]stim̄[mun]g s[e*i*ne]r Lage die B[e]stim̄[mun]g 4 er s[e*i*ne]r P[*un*]kte, die [nic]ht in E[*i*ne]r Ebene lieg.[en] | Dav.[on] macht d[ie] Ebene eine Ausn.[ahme] die d[u]rch 3 P[*un*]cte b[e]stim̄[m]t wird. Und die *g*[e]*r*[a]*de L*[*ini*]*e*, w[e]lche d[u]rch 2 P[*un*]kte b[e]stim[m]t wird. | Item die Kug[e]lfläche, u[nd] Kug[e]l, w[e]lche d[u]rch *Ein*[en] P[*un*]kt, ihr[e]n Mitt[e]lp[*un*]kt so b[e]stim[m]t | wird, d[a]ß sie [ni]cht m[e]hr 2rl[ei] v[e]rsch[*ie*]dene Orte ein-n[e]hm[en] kann. Item alle | Conoidischen K[ö]rp[e]r u[nd] Flächen – w[e]lche d[u]rch 2 P[*un*]kte ihr[e]r Axe b[e]stim̄[m]t w[e]rd[en]. ‖

Einst handhabte ich die Definitionen: |

E[*in*]e *Kug*[e]*lfläche* ist e[*in*]e Fläche der[en] alle P[*un*]kte zu *Einem* e[*in*]e gl[ei]che | Lage, die *Entf*[e]*r*[nun]*g* haben. E[*i*]ne *Ebene* e[*in*]e Fläche, der[en] alle | P[*un*]kte von 2 P[*un*]kten gl[ei]chweit abstehen. Eine *Kreislinie* e[*in*]e Linie | der[en] alle P[*un*]kte v[on] 2 P[*un*]kt[en] a, b e[*in*]e gleiche (d.h.

alle v[on] a eine, alle v[on] b e[in]e and[e]re) ‖ Entf[e]r[nun]g haben. E[in]e g[e]r[a]*de Linie* e[in]e Li[ni]e der[en] alle | P[un]kte v.[on] 2 P[un]kt[e]n gl[ei]chweit absteh[e]n, u.[nd] zugl[ei]ch auch v[on] 2 *and*[e]r[e]*n* P[un]kten | die von den erst[e]r[e]n gl[ei]ch weit absteh[e]n, ab[e]rm[a]ls gl[ei]chweit absteh[e]n. Und | dgl. °(Dieß sind L[e]hrs[ä]tze, [ni]cht Def:[*in*itionen])° | 35

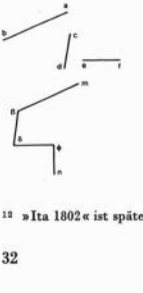
E[in]e solche Def.[*in*ition] d[e]r g[e]r.[aden] L.[*inie*], w[e]lche v.[on] e[*in*e]r Eig[en]s.[chaft] herg[e]no$\bar{\text{m}}$[men] ist, die $\bar{\text{m}}$[an] ohne Voraus-‖setz[un]g d[e]r L[e]hre v.[on] den Parallelen b[e]weis[en] kann, nützt f.[*ür*] die Theorie der | Parallelen nichts: sond.[ern] $\bar{\text{m}}$[an] [mu]ß e[in]e solche Eig[en]s.[chaft] d[e]r g[e]r[aden] L[*inie*] in die Def.[*in*ition] aufn[e]hm[en] | w[e]lche erst d[u]rch die Annahme d[e]r Parall.[elen] hat b[e]wies[en] w[e]rd[en] kö[nnen]. Dann | muß $\bar{\text{m}}$[an] v[e]rsuch[en], ob sich d[ie] Mö]gl[*i*]chk[*ei*]t d[e]r g[e]r[aden] L[*inie*] nach d[*ie*]s[e]r Def.[*in*ition] zeig[en] lasse. etc. | Ita 1802.[12] 40

Anm[e]*rk*[*un*]*g üb*[e]*r Definitionen üb*[e]*rh*[*au*]*pt.* Nicht Alles was ein ausschließ[e]nd[e]s M[e]rkm[a]l des ‖ Definitums ausdrü[c]kt, ist e[in]e ächte Definition. So kö[nn]te $\bar{\text{m}}$[an] z.B. sagen: | Dreyeck ist diej.[enige] g[e]radl.[inige] Figur, w[e]lche die Eig[en]s.[chaft] hat, d[a]ß die Su$\bar{\text{m}}$[m]e all[e]r ihr[e]r W[*in*]k[e]l | = 2R; ab[e]r dieß wäre k.[eine] log[*i*]sche Def.[*in*ition], obgl[*ei*]ch eine ausschließende Ch[a]r[a]kt[e]r[*istik*]. | 45

Ontologischer Lehrsatz. |

Was auf irgend einen Umstand keine Aenderung hervorbringt, ‖ *aendert auch die Aenderung des Umstand*[e]*s nicht.* ‖ (Das hieße mit and[e]r[e]n Wort[e]n, | w[enn] die Größ[en] x, y, z was | i$\bar{\text{m}}$[me]r f.[*ür*] W[e]rthe hab[en] kö[nnen], ohne ‖ d[a]ß sich die Gr[ö]ße u aend[e]rt, so kann auch u alle | mögl[*i*]chen 7 W[e]rthe hab[en], ohne d[a]ß sich x, y, z änd[e]rn ‖ 48a 50 50a

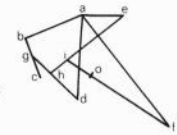
Geometrischer Lehrsatz. Es ist irgend e[in]e Anzahl g[e]rad[e]r Lini[en] (od[e]r | dopp[e]lt[e]r P[un]kte) ab, cd, ef, gh im Raume gegeben. Aus | dem Punkte m wird e[in]e L[*ini*]e # u[nd] – irg[en]d e[*in*e]r z.B. ab dies[e]r Li-|nien g[e]zog[en], u[nd] aus dem Endp[un]kt β ab[e]rmals e[in]e L[*ini*]e # u[nd] = irg[en]d e[*in*e]r zwey-‖ten, z.B. cd jen[e]r Lini[en] u.s.w., bis man mit allen zu Ende ist. | Ich behaupte nun, d[a]ß der P[un]kt n w[e]lch[e]r d[e]r Endp[un]kt | d[e]r l[e]tztg[e]zog[e]nen L[*ini*]e ist,



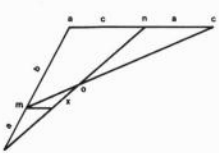
[12] »Ita 1802« ist später zwischen Z. 43 und Z. 44 hinzugefügt worden.

ein[e]rley bleibe, in w[e]lch[e]r Ord[nun]g, als | man die Linie[n] ab, cd, ef, gh benützt. *B*[e]*w*[*ei*]*s*. Denn w[enn] d[*ie*]s[e]r Li[*nien*] [nu]r 2, so | ist d[e]r B[e]-
w[*ei*]s sehr bekannt. Daraus läßt sich ab[e]r auch auf e[*in*]e j[e]de and[e]re ‖ Anzahl folg[e]rn. |

Ein and[e]*r*[e]*r*. Es gibt eine beliebige Anzahl Punkte b, c, d, e, f im Raume. |



Man v[e]rbindet beliebige zwey b, c derselben, mit e[*ine*]r g[e]rad[en] | L[*ini*]e, u.[nd] nim[m]t deren Mitte in g; diesen Mittelp[un]kt g v[e]rbindet | man mit einem dritten P[*un*]kte d, u.[nd] nim[m]t v.[on] dies[e]r L[*ini*]e an g ‖ das Dritth[*ei*]l in h; m̄[an] v[e]r-bindet h mit einem vierten P[*un*]kte e, u.[nd] nim[m]t | v.[on] d[*ie*]s[e]r L[*ini*]e he; das Vierth[*ei*]l aus h, in i; m̄[an] v[e]rb.[*in*]det i mit einem fünft[e]n P[*un*]kte | f, u.[nd] nim[m]t v.[on] d[*iese*]r L[*inie*] if das Fünfth[*ei*]l aus i in o; u.s.w. D[e]r l[e]tzte Th[ei]l[*un*]gsp[*un*]kt o | den m̄[an] so erhält, bleibt ein[e]rley, in w[e]lch[e]r Ord[nun]g als m̄[an] die g[e]g[e]b[e]nen | P[*un*]kte b, c, d, e, f benützt. – (Folgt a.[*us*] d[e]r Lehre v.[om] Schwerp[*un*]kt. item vom ‖ K[*rä*]ft[e]parallelogr[a]m̄[m]. Denn, wenn a ein 6[te](e)r P[*un*]kt ist, der so liegt, d[a]ß ab, ac, | ad, ae, af die R[*i*]cht[*un*]g u[nd] Größe d[e]r K[*rä*]fte ausdrück[en], w[e]lch[e] auf ei[nen] in a b[e]f[*in*]d-l[*i*chen] | mater.[*ie*llen] P[*un*]kt wirken; so ist ao der 5[te] Th[*ei*]l der mittl[e]r[e]n K[ra]ft. Od[e]r 5 P[*un*]kte | in a die cohäriren, w[e]rd[en] in den Schwerp[*un*]kt



d[e]rj[e]n[*i*]g[en] P[*un*]kte g[e]bracht, w[e]l-che sie ohne | Cohäs.[*ion*] eing[e]no m̄[men] hätten.) *Beweis*. Zum B[e]weise dieses Satzes wird ‖ folgendes *Lemma* dienen: Wenn die Linien ab, ac, bey m, n nach dem V[e]rhältnisse getheilt sind, d[a]ß am : bm = b : a, | (wo c, a g[e]wisse Zahl[en]) an : cn = c : a so schneiden | sich die Linien cm, bn die m̄[an] aus den Endp[*un*]kt[en] c, b in die Th[*ei*]l[*un*]gsp[*un*]kte | m, n zieht, in f[o]lg[en]den V[e]rhältnissen, daß: ‖

Hyp.[*othesis*]
$$\begin{cases} am : bm = b : a \\ an : cn = c : a \end{cases}$$

thes.[*is*]
$$\begin{cases} co : mo = a + b : c \\ bo : no = a + c : b \end{cases}$$

B[e]*w*[*ei*]*s*. M.[an] ziehe mx ∦ ac. so ist | weg[en] $\Delta mox \sim \Delta con$; co : mo = cn : mx |