Matthias Schirn (Hrsg.)

Studien zu Frege I
Logik und Philosophie der Mathematik

Studies on Frege I
Logic and Philosophy of Mathematics

problemata
frommann-holzboog 42

Herausgeber der Reihe „problemata": Günther Holzboog

© Friedrich Frommann Verlag · Günther Holzboog GmbH & Co
Stuttgart-Bad Cannstatt 1976
ISBN 3 7728 0616 3 (Ln) — ISBN 3 7728 0617 1 (Br)

FÜR RAINER UND HELGA MARTEN

Die vorliegende, hauptsächlich aus Erstveröffentlichungen zusammengestellte Aufsatzsammlung, befaßt sich kritisch und würdigend mit dem Werk des Logikers, Mathematikers und Philosophen Gottlob Frege.

Band I, der die Trilogie mit einem programmatischen Beitrag zur historisch-kritischen Standortbestimmuung der Fregeschen Philosophie eröffnet, versammelt Arbeiten zur Logik und Philosophie der Mathematik. Es zeigt sich, daß Freges Einführung des Allquantors in der Begriffsschrift *eine Integration von Aussagen- und Prädikatenkalkül ermöglichte, die entscheidend über Booles Logik hinausführte. Neben textanalytischen Behandlungen spezieller Probleme des Fregeschen Logiksystems und einer Beleuchtung der „logizistischen These" im Kontext der neueren mathematischen Grundlagenforschung ist Freges Auseinandersetzung mit Hilberts Axiomatik der Geometrie Gegenstand kritischer Untersuchungen. Unter anderem wird aufzuweisen versucht, daß Frege entgegen einem mathematikhistorischen Vorurteil ein methodisch haltbares Verständnis der Axiomatik vorgeschlagen hat.*

In Band II werden zunächst Freges Funktionstheorie und sein Logikbegriff einer kritischen Analyse unterzogen. Auf eine Darstellung der Entwicklung seiner Urteilslehre folgen zwei Aufsätze zur Quantifikationstheorie, von denen der eine Freges Übergang von einer substitutionellen zu einer objektuellen Definition der Quantifikation thematisiert, während der andere Freges Ansatz mit entsprechenden Überlegungen bei Russell und Quine vergleicht. Schließlich wird in mehreren Beiträgen die Identitätsproblematik bei Frege unter vergleichenden und theoriekritischen Gesichtspunkten erörtert.

Band III enthält vorwiegend Studien zu Freges Theorie über Sinn und Bedeutung, die allgemein als Beginn der modernen extensionalen und intensionalen Semantik betrachtet wird. Unter anderem wird versucht, eine einheitliche Erklärung des Bedeutungsbegriffs zu geben und den Geltungsbereich des Kontextprinzips in Freges Philosophie abzugrenzen. Weitere Aufsätze befassen sich mit Spezialproblemen der Theorie über Sinn und Bedeutung. Eine um Vollständigkeit bemühte Bibliographie schließt die Sammlung ab.

The present collection of articles, mainly consisting of new publications, is a critical appreciation of the work of the logician, mathematician and philosopher Gottlob Frege.

Volume I opens the collection with a programmatic contribution determining critically the historical position of Frege's philosophy. The main part of the volume contains papers on logic and philosophy of mathematics. Among other things it is argued that Frege's introduction of the universal quantifier in the Begriffsschrift *enabled an integration of the statement- and predicate-calculus, going far beyond Boole's logic. Besides textual analyses of special problems concerning Frege's logical system and an elucidation of the „logistic thesis" in the context of modern investigations in the foundations of mathematics, Frege's discussion of Hilbert's axiomatic method is subjected to critical analysis. One point made is that, contrary to a prejudice in the recent history of mathematics, Frege's understanding of the axiomatic method is tenable.*

The first papers of volume II deal, in a critical way, with Frege's theory of functions and his concept of logic. An account showing the development of his doctrine of judgment, is followed by two papers on the theory of quantification. The first discusses Frege's change from a substitutional to an objectual definition of quantification, while the second compares Frege's approach with corresponding reflections of Russell and Quine. Finally, several articles discuss problems of identity in Frege under comparative and analytical aspects.

Volume III chiefly contains studies on Frege's theory of sense and reference, generally regarded as the beginning of modern extensional and intensional semantics. Included is an attempt to provide a uniform explanation of the concept „Bedeutung" and to delimit the scope of the context principle in Frege's philosophy. Further articles deal with special problems of the theory of sense and reference. A fully comprehensive bibliography is appended to the collection.

Inhalt: Band I

** Erstveröffentlichungen
* Erweiterte Fassungen

Vorwort 11

Einleitung des Herausgebers
Einige Bemerkungen zum Zusammenhang von Logik, Mathematik und Sprachphilosophie bei Frege ** 13

Zur historisch-kritischen Standortbestimmung der Philosophie Freges

Hans D. Sluga
1. Frege as a Rationalist ** 27

Zum wissenschaftlichen Nachlaß Freges

Albert Veraart
2. Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestands der nachgelassenen Schriften Freges ** 49

Logik und Philosophie der Mathematik

Victor H. Dudman
3. From Boole to Frege ** 109

Robert Sternfeld
4. The Logistic Thesis ** 139

W. D. Hart
5. Imagination, Necessity and Abstract Objects ** 161

Michael D. Resnik
6. Die Frege-Hilbert Kontroverse 193

Friedrich Kambartel
7. Frege und die axiomatische Methode. Zur Kritik mathematik-historischer Legitimationsversuche der formalistischen Ideologie 215

Michael Dummett
8. Frege on the Consistency of Mathematical Theories ** 229

Christian Thiel
9. Gottlob Frege: Die Abstraktion 243

Charles Parsons
10. Some Remarks on Frege's Conception of Extension ** 265

Terrell Ward Bynum
11. The Evolution of Frege's Logicism ** 279
Christian Thiel
12. Wahrheitswert und Wertverlauf. Zu Freges Argumentation im § 10 der „Grundgesetze der Arithmetik" ** 287
Franz Kutschera
13. Freges Begründung der Analysis 301
Abkürzungsverzeichnis 313
Mitarbeiter dieses Bandes 315

Inhalt: Band II

Reinhardt Grossmann
14. Structures, Functions and Forms **
Wolfgang Carl
15. Freges Unterscheidung von Gegenstand und Begriff **
Eike-Henner W. Kluge
16. Freges Begriff des Logischeinfachen **
Gottfried Gabriel
17. Einige Einseitigkeiten des Fregeschen Logikbegriffs **
Hans-Ulrich Hoche
18. Vom ‚Inhaltsstrich' zum ‚Waagerechten'. Ein Beitrag zur Entwicklung der Fregeschen Urteilslehre **
Leslie Stevenson
19. Freges zwei Definitionen der Quantifikation
Robert Sternfeld
20. The Mathematization of Logic: Quantified Sentences **
Ignacio Angelelli
21. Friends and Opponents of the Substitutivity of Identicals in the History of Logic **
Charles E. Caton
22. „The idea of Sameness challenges reflection" **
Matthias Schirn
23. Identität und Identitätsaussage bei Frege **
Bertram Kienzle
24. Notiz zu Freges Theorien der Identität **

David Wiggins
25. Frege's Problem of the Morning Star and the Evening Star **

Ronald Suter
26. Frege und Russell über das „Paradox der Identität" *

Haig Khatchadourian
27. Kripke and Frege on Identity Statements **

Abkürzungsverzeichnis

Mitarbeiter dieses Bandes

Inhalt: Band III

Fred Sommers
28. Frege or Leibniz? **

Michael D. Resnik
29. Frege's Context Principle Revisited **

Ernst Tugendhat
30. Die Bedeutung des Ausdrucks ‚Bedeutung' bei Frege. Postskript 1975 **

Victor H. Dudman
31. *Bedeutung* for Predicates **

David S. Shwayder
32. On the Determination of Reference by Sense **

Leonard Linsky
33. Frege and Russell on Vacuous Singular Terms **

Howard Jackson/Malcolm Acock
34. Sense and Sense Data **

Richard M. Martin
35. Some Comments on Frege's Pragmatic Concerns **

Anhang

Peter Janich
36. Trägheitsgesetz und Inertialsystem. Zur Kritik G. Freges an der Definition L. Langes

Bibliographie

Abkürzungsverzeichnis

Mitarbeiter dieses Bandes

Vorwort

Verfolgt man die einschlägige Fregeliteratur seit Veröffentlichung der *Nachgelassenen Schriften* im Jahr 1969, so stellt man fest, daß ihre Rezeption nicht nur Anstöße zu einer aspektativen Erweiterung, sondern auch zu einer kritischen Überprüfung und teilweisen Revision früherer Fregeinterpretationen vermittelt hat. Weitere Anstöße zu einer tragfähigeren Fundierung des „historischen" und „systematischen" Fregeverständnisses könnten von der kurz bevorstehenden Veröffentlichung des wissenschaftlichen Briefwechsels Freges ausgehen. Im Kontext dieser grundsätzlich positiven Entwicklung verstehe ich die vorliegende Aufsatzsammlung primär als Forum einer kritischen Diskussion der Fregeschen Philosophie unter Einbeziehung neuer Interpretationshorizonte und neuer Interpretationsziele. Sie soll den Stand der gegenwärtigen Fregeforschung angemessen widerspiegeln und zugleich der künftigen Fregeforschung fruchtbare Impulse geben.

Ich habe diese Anthologie in drei Bände mit jeweils besonderem Untertitel gegliedert und war darum bemüht, die Beiträge in den einzelnen Bänden, soweit es möglich und zweckmäßig erschien, nach sachlichen Gesichtspunkten anzuordnen. Die Aufsätze zur Identitätsproblematik in Band II nehmen in dieser Hinsicht eine Sonderstellung ein. Da Band III im Unterschied zu Band II mehrere Abhandlungen speziell zu Grundfragen der Theorie über Sinn und Bedeutung enthält, schien mir ein jeweils eigener Untertitel für beide Bände nicht nur editorisch wünschenswert, sondern auch sachlich hinreichend gerechtfertigt.

Den Autoren dieser Sammelbände danke ich herzlich für ihre Mitarbeit. Besonderer Dank gebührt Christian Thiel für seine Unterstützung meines editorischen Vorhabens und Bernard Ransom für seine Diskussionsbereitschaft beim Auftreten editionstechnischer Schwierigkeiten. Gregg Beasley, Bertram Kienzle und Michael Lippmann danke ich für freundliche Mithilfe bei der Durchsicht der von mir verfaßten und übersetzten Beiträge. Günther Holzboog gilt mein Dank für sein Interesse an der Veröffentlichung dieses Sammelwerkes. Schließlich möchte ich Klaus Giehle für die Betreuung der schwierigen Herstellungsarbeiten meinen Dank aussprechen.

Oxford, im Frühjahr 1976 *Matthias Schirn*

Einige Bemerkungen zum Zusammenhang von Logik, Mathematik und Sprachphilosophie bei Frege

Bekanntlich ging für Frege die Idee der Begriffsschrift als einer künstlichen Präzisionssprache aus dem Bedürfnis hervor, die Lückenlosigkeit von Schlußketten auf sichere Weise überprüfen zu können und so eine Grundlage für die Beurteilung der erkenntnistheoretischen Natur der bewiesenen Gesetze zu gewinnen. Die faktisch gesprochene Umgangssprache erwies sich ihm zur Einlösung dieses wissenschaftlichen Exaktheitsanspruchs als unzureichend. Nicht die Darstellung einer abstrakten Logik, ein auf rein logische Verhältnisse beschränkter *calculus* lag der Konzeption der *Begriffsschrift* von 1879 als Zielsetzung zugrunde, sondern die Wiederannäherung an den Leibnizschen Gedanken einer *lingua sive characteristica universalis,* und zwar zunächst für die Arithmetik (BRL S. 11 ff.). Mittels der so verstandenen Formelsprache des reinen Denkens sollten logische Beziehungen durch zahlenmäßig auf das Notwendige beschränkte Schriftzeichen eindeutig und leicht kontrollierbar repräsentiert, bestimmte Inhalte genauer als durch die gewöhnliche Sprache dargestellt werden.

Die Wiedergabe von Inhalten durch Urteile ist in der *Begriffsschrift*, die die erste systematische Darstellung des Aussagen- und Prädikatenkalküls in der Geschichte der Logik enthält, dadurch gekennzeichnet, daß von dem Ausdruck all dessen, was für die Schlußfolge bedeutungslos ist, abstrahiert wird; nur auf den *begrifflichen* Inhalt kommt es bei der Formulierung lückenloser Schlußketten an. Was mit „begrifflichem Inhalt" gemeint ist, zeigt Frege (BS § 3) am Beispiel eines Aktiv-Passiv Satzpaars. Die beiden Sätze (Urteile) „Bei Plataeae siegten die Griechen über die Perser" und „Bei Plataeae wurden die Perser von den Griechen besiegt" stehen in einer solchen Beziehung zueinander, daß die Folgerungen, die aus dem einen in Verbindung mit bestimmten anderen Sätzen gezogen werden können, stets auch aus dem zweiten in Verbindung mit denselben anderen Sätzen zu ziehen sind. Wenn

auch zwischen beiden Sätzen eine geringe Sinndifferenz besteht, so stimmen sie doch inhaltlich im wesentlichen überein. Denjenigen Teil des Inhalts, der bei beiden Sätzen derselbe ist, nennt Frege *begrifflichen Inhalt*, woraus sich auch der Name „Begriffsschrift" ergeben hat. Später, nach Entwicklung der Theorie über Sinn und Bedeutung, spricht Frege bei Aktiv- und korrespondierendem Passivsatz nicht mehr von demselben begrifflichen Inhalt, sondern von demselben *Gedanken*. Daß zwei Sätze denselben Gedanken ausdrücken, besagt, daß sie in dem Teil ihres Inhalts übereinstimmen, der allein als wahr anerkannt oder als falsch verworfen werden kann. Nur auf diesen Teil des Inhalts ist die Logik gerichtet. Was sonst noch den Inhalt eines Satzes ausmacht, nennt Frege die Färbung des Gedankens (Log II, S. 153, 155; KÜL S. 213 f.). Worin bestehen nun für Frege Wesen und Aufgabe der Logik? Welche Beziehung hat sie zur Mathematik und Sprachphilosophie? Diese Fragen seien im folgenden grob beantwortet, wobei ich mich im wesentlichen an Freges *Nachgelassenen Schriften* orientiere.

Zwar haben nach Frege alle Wissenschaften wahre Aussagen zum Ziel, aber die Logik unterscheidet sich von jeder anderen Wissenschaft dadurch, daß sie sich in ausgezeichneter Weise mit dem Prädikat „wahr" befaßt. Sie beschäftigt sich in ähnlicher Weise mit dem Prädikat „wahr" wie z. B. die Physik mit den Prädikaten „schwer" und „warm", mit dem Unterschied jedoch, daß sich die Physik durch kein Prädikat in ihrer Eigenart so spezifisch kennzeichnen läßt wie die Logik durch den Ausdruck „wahr". In der Angabe dessen, was für alle Einzelwissenschaften unbedingte Geltung hat, nämlich in der systematischen Aufstellung der Gesetze des richtigen Schließens als eines Urteilens, das sich anderer Wahrheiten als Rechtfertigungsgründen bewußt ist, liegen Ziel und Aufgabe der Logik (Log I, S. 3; Log II, S. 139). Dagegen sieht Frege die Aufgabe der Erkenntnistheorie darin, diejenigen Urteile zu untersuchen, deren Rechtfertigung, falls sie überhaupt einer solchen bedürfen, nicht auf bereits anerkannten Wahrheiten, sondern auf etwas anderem beruht (Log I, S. 3). Da die Natur der logischen Gesetze des korrekten Schließens im Grunde in einer inhaltlichen Entwicklung des Wortes „wahr" besteht, kann Frege die Logik als „Wissenschaft der allgemeinsten Gesetze des Wahrseins" bestimmen (Log II, S. 139; vgl. GGA I, S. XV—XVII; Ged S. 342 f. [58 f.]). Für die Gesetze des ort- und zeitlosen, vom Urteilenden unabhängigen Wahrseins ist charakteristisch, daß sie auch als *Vorschriften* aufgefaßt werden können, die — wie die Sitten- und Staatsgesetze — vorschreiben, wie gehandelt (geurteilt, geschlossen) werden soll. Gesetze in diesem Sinn sind keine psychologischen Denkgesetze, beschreiben nicht das Denken als einen seelischen Vorgang, sondern sind verbindliche Normen für das richtige Schließen in den Wissenschaften. Stünde das faktische Denken stets im Ein-

klang mit den logischen Gesetzen, so wäre es überflüssig, diese bestimmt aufzustellen, es fehlte ihnen die normative (präskriptive) Kraft.

Da das Wort „wahr" der Logik die Richtung weist, ähnlich wie die Worte „schön" die Ästhetik und „gut" die Ethik in ihrem Wesen bestimmen, wäre näherer Aufschluß über die Fregesche Auffassung der Logik von einer Definition des Wahrheitsbegriffs zu erwarten. Wie ist das Wahrsein eines Gedankens genauer zu fassen, was ist der Sinn (die Bedeutung) des Ausdrucks „wahr"? Jeder Versuch, diese Fragen mittels einer Definition von „wahr" zu beantworten, führt — wie Frege nachzuweisen versucht (Log II, S. 139 f.; Ged S. 343 f. [59 f.]) — in einen Zirkel und ist somit zum Scheitern verurteilt. „Wahrheit ist offenbar etwas so Ursprüngliches und Einfaches, daß eine Zurückführung auf noch Einfacheres nicht möglich ist" (Log II, S. 140). Logischeinfaches wie der Wahrheitsbegriff läßt sich nach Frege nur *erläutern*, wobei auf ein verständnisvolles Entgegenkommen gerechnet werden können muß (vgl. LM S. 224; GLG I, S. 288 [301]). Eine Erläuterung von „wahr" wird sinnvollerweise in einem Vergleich mit anderen Prädikaten und einer damit zusammenhängenden Verdeutlichung seiner Anwendbarkeit und semantischen Funktion bestehen (Log II, S. 140 ff.). Ich beschränke mich hier auf das Wesentliche.

Das Prädikat „wahr" unterscheidet sich von allen anderen Prädikaten dadurch, daß es in jedem Behauptungssatz mit ausgesagt wird. In der Form des Behauptungssatzes wird die Anerkennung der Wahrheit eines Gedankens ausgesprochen und für diesen Zweck ist das Prädikat „wahr" grundsätzlich entbehrlich. Selbst dann, wenn es gebraucht wird wie etwa in dem Satz „Es ist wahr, daß das Meerwasser salzig ist", liegt die eigentlich behauptende Kraft nicht in ihm, sondern allein in der Form des Behauptungssatzes. Das Wort „wahr" hat zwar einen Sinn, aber einen solchen, der zum Sinn des ganzen Satzes, in dem es als Prädikat vorkommt, nichts beiträgt, und so macht es „eigentlich nur einen mißglückten Versuch [...], auf die Logik hinzuweisen, indem das, worauf es eigentlich dabei ankommt, gar nicht in [ihm selbst] liegt, sondern in der behauptenden Kraft, mit der der Satz ausgesprochen wird" (MLE S. 272). Die behauptende Kraft, der kein besonderer Satzteil entspricht, ist nun dasjenige, was auf das Wesen der Logik am deutlichsten hinweist. Die Logik erweist sich somit als Wissenschaft der allgemeinsten Gesetze, auf Grund derer Sätze mit behauptender Kraft ausgesprochen werden können.

Nach Frege ist die Mathematik enger als andere Wissenschaften mit der Logik verknüpft, da in ihr das logischen Gesetzen unterworfene Schließen und Definieren von größter Wichtigkeit ist. Die Mathematik stellt sich ganz allgemein als ein System von Wahrheiten dar, die durch logische Schlüsse mit-

einander verbunden sind (LM S. 221)[1], wobei die Möglichkeit verschiedener Systeme nicht auszuschließen ist. Die Grundlagen eines mathematischen Systems bilden die Axiome und die Definitionen. Unter Axiomen versteht Frege wahre Gedanken, die in dem betreffenden System unbeweisbar und eines Beweises auch nicht bedürftig sind. Sie unterscheiden sich in den letztgenannten Hinsichten von den Theoremen, die ebenfalls Wahrheiten sind, aber durch einen Schluß gewonnen und selbst wieder für mehrere Schlüsse beim Aufbau eines mathematischen Systems gebraucht werden. Ob nun ein gegebener wahrer Gedanke, der keines Beweises bedarf, den Status eines Axioms hat, hängt auch von dem betreffenden System ab; denn eine Wahrheit kann in einem System ein Axiom, in einem anderen dagegen ein Theorem sein. Von einem Axiom kann nur im Hinblick auf ein bestimmtes System gesprochen werden. Aus der Systemrelativität der Axiome folgt, daß die Möglichkeit eines mathematischen Systems die Möglichkeit eines anderen nicht auszuschließen braucht (LM S. 221 f.).

Während die Axiome in einem mathematischen System als Prämissen für die Schlüsse dienen, mittels derer es aufgebaut wird, wird durch eine Definition einem einfachen Zeichen, das vorher keinen Sinn (keine Bedeutung) hatte, ein bestimmter Sinn beigelegt. Dieser Sinn wird durch ein zusammengesetztes Zeichen (das Definiens) ausgedrückt, dessen Sinn aus seiner Zusammensetzung hervorgeht. Alle anderen mathematischen Sätze (die Axiome und Theoreme) dürfen im Unterschied zu den Definitionen keinen Ausdruck enthalten, dessen Sinn (Bedeutung) nicht schon vorher feststände. Da das einfache Zeichen (das Definiendum) durch die Definition denselben Sinn erhält wie die zusammengesetzte Zeichengruppe, wird durch seine definitorische Einführung inhaltlich keine Erweiterung im System vorgenommen. Definitionen sind daher für den Aufbau eines wissenschaftlichen Systems theoretisch grundsätzlich entbehrlich; nur unter praktischen Gesichtspunkten erweisen sie sich auf Grund ihrer Abkürzungs- und Vereinfachungsfunktion als systemnotwendig. Nachdem nun einem neuen Zeichen durch die Definition ein Sinn (eine Bedeutung) verliehen worden ist, geht diese von einem erklärenden in einen behauptenden Satz über, der als Prämisse der Schlüsse beim Aufbau des Systems gebraucht werden kann. Definitionen nehmen durch diese Verwandlung lediglich in einem formalen Sinn die Rolle von Axiomen an und sind nicht eigentlich als solche anzusehen. Axiome sind nach Frege ihrer Natur

1 Frege läßt in seiner Schrift „Logik in der Mathematik" (S. 219 f.) offen, ob es der Mathematik eigentümliche Schlußweisen gibt, die nicht auf ein allgemeines Gesetz der Logik zurückgeführt werden können.

nach wahre Gedanken, die unsere Erkenntnis erweitern, während Definitionen zunächst willkürliche Festsetzungen sind, die dann in tautologisch-wahre und somit triviale Behauptungssätze übergehen (GLG I, S. 262 ff. [319 ff.]; GLG III, S. 289 f. [302 f.]; LM S. 224 ff.). Der Status der Axiome und Definitionen einer mathematischen Theorie, ihre Beziehung zueinander sowie das definitionstheoretische Anfangsproblem, das Freges formalistischer Gegenspieler Hilbert mittels sog. axiomatischer bzw. impliziter Definitionen zu lösen versuchte, bilden den Kern der Kontroverse, die beide Mathematiker um die Jahrhundertwende über die Grundlagen der Geometrie geführt haben und der im vorliegenden Band zwei Beiträge gewidmet sind. Das von Frege in den beiden Aufsatzreihen „Über die Grundlagen der Geometrie" in Auseinandersetzung mit Hilberts Axiomatik entwickelte Verständnis der axiomatischen Methode steht zusammen mit seiner kritischen Beleuchtung zeitgenössischer mathematischer Lehrmeinungen im zweiten Band der „Grundgesetze", die insbesondere auf den Nachweis der Unmöglichkeit einer formalen Arithmetik abzielt, paradigmatisch für seine kritische und philosophisch überlegene Einstellung zu Problemen im Bereich der mathematischen Grundlagenforschung.

Es ist hinreichend bekannt, daß der von Frege in Angriff genommene Versuch, die Arithmetik als Zweig der Logik nachzuweisen, nämlich die arithmetischen Grundbegriffe wie z. B. den Begriff der natürlichen Zahl (der Anzahl) und die Nachfolgerbeziehung zwischen natürlichen Zahlen auf rein logische Begriffe zurückzuführen, gescheitert ist. Weniger verbreitet ist jedoch die Einsicht, daß der Fehler, der zum Zusammenbruch des in den „Grundgesetzen" begriffsschriftlich formulierten Systems der Mengenlehre geführt hat, nicht in dem Grundgesetz der Umsetzbarkeit einer Wertverlaufsgleichheit in eine Allgemeinheit einer Gleichheit und umgekehrt als einem Umsetzungs*schema* liegt, sondern in den von Frege zu weit gefaßten Regeln der rechtmäßigen Bildung von Funktionsausdrücken. Mittels dieser Regeln lassen sich Funktionsnamen konstruieren, denen gemäß der von Frege festgelegten Bedeutungskriterien keine Bedeutung zugeordnet werden kann und die daher als Einsetzungsinstanzen für die im Grundgesetz V vorkommenden Funktionsbuchstaben „*f*" und „*g*" auszuschließen sind. Grundgesetz V erweist sich also im Fregeschen System nur insofern als fehlerhaft, als alle diejenigen Ausdrücke zur Ersetzung von „*f*" und „*g*" zugelassen werden, welche die von Frege aufgestellten Bedingungen für die rechtmäßige Bildung von Begriffsausdrücken erfüllen. Werden die syntaktischen Regeln des Systems der „Grundgesetze" dahingehend verschärft, daß sie die Konstruktion imprädikativer Funktions- und Gegenstandsnamen verbieten, so ist Grundgesetz V nicht durch ein anderes zu ersetzen — wie es Frege selbst erfolglos versucht hat —,

sondern kann in seiner ursprünglichen Formulierung beibehalten werden, ohne daß in dem neuen System ein Widerspruch auftritt[2].

Frege hat das Programm der logizistischen Grundlegung der Arithmetik, das in der *Begriffsschrift* mit der rein logischen Erklärung der Nachfolgerbeziehung zwischen natürlichen Zahlen begonnen, in den „Grundlagen" mit der Definition des Anzahlbegriffs weitergeführt und schließlich in den „Grundgesetzen" in begriffsschriftlicher Darstellung vollendet wurde, angesichts der irreparabel erscheinenden Erschütterung seines Systems durch die Russellsche Antinomie ausdrücklich aufgegeben. „Ich habe die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und daß demgemäß in der Arithmetik alles rein logisch bewiesen werden müsse. Zweitens habe ich die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik auch der Anschauung keinen Beweisgrund zu entnehmen brauche, unter Anschauung verstehe ich die geometrische Erkenntnisquelle, die Erkenntnisquelle nämlich, aus der die Axiome der Geometrie fließen" (NVG S. 298). Neben der geometrischen Erkenntnisquelle erkennt Frege in seinen späten Fragmenten „Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften" und „Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik" noch die Sinneswahrnehmung und die logische Erkenntnisquelle als Erkenntnisquellen an. Für die Mathematik (Arithmetik und Geometrie) kommen nur die logische und die geometrische Erkenntnisquelle in Betracht und in diesem Bereich wird der letztgenannten, die von allen dreien am wenigsten der „Verunreinigung" ausgesetzt ist (vgl. EMN S. 286 ff.), eine leitende Funktion zuerkannt. „Da auch die logische Erkenntnisquelle allein wahrscheinlich keine Zahlen liefern kann, so wird man auf die geometrische Erkenntnisquelle verwiesen. Das ist dadurch bedeutsam, weil damit Arithmetik und Geometrie, also die gesamte Mathematik einer und derselben, nämlich der geometrischen Erkenntnisquelle entfließt, die damit zum Range der eigentlichen mathematischen Erkenntnisquelle aufsteigt, wobei natürlich die logische Erkenntnisquelle immer mitbeteiligt ist" (NVG S. 299). In den *Grundlagen der Arithmetik* hatte sich Frege ausdrücklich der Kantischen Auffassung angeschlossen, daß die geometrischen Wahrheiten synthetische Urteile a priori sind, während sein Bestreben in der Arithmetik dahin ging, ihre Gesetze im Unterschied

2 Vgl. dazu in diesem Band den Beitrag von Ch. Thiel, „Gottlob Frege: Die Abstraktion", S. 263 f. Eine umfassende Erörterung der hier angeschnittenen Problematik findet sich von demselben Verf. in „Zur Inkonsistenz der Fregeschen Mengenlehre", in: *Frege und die moderne Grundlagenforschung. Symposium, gehalten in Bad Homburg im Dezember 1973*, ed. Ch. Thiel, Meisenheim am Glan 1975, S. 134—159.

zu Kant als analytische bzw. rein logische Aussagen nachzuweisen (GLA §§ 87 ff.)[3]. Wenn nun, wie Frege in seiner letzten Schaffensphase annahm, die gesamte Mathematik in der geometrischen Erkenntnisquelle zu fundieren ist, so schließt dies ein, daß die arithmetischen Aussagen entgegen der früheren Auffassung denselben erkenntnistheoretischen Status wie die geometrischen Wahrheiten erhalten. Eine Begründung der Arithmetik auf der Basis der geometrischen Erkenntnisquelle ist von Frege allerdings nicht mehr ausgearbeitet worden; sein „Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik" gelangt über einen äußerst fragmentarischen Ansatz nicht hinaus.

Im folgenden versuche ich, den grundsätzlichen Zusammenhang zwischen Logik und Sprachphilosophie bei Frege zu skizzieren. Zum besseren Verständnis dieses Zusammenhangs empfiehlt es sich, auf einige der von Frege erörterten logischen Mängel der Wortsprache kurz einzugehen; denn gerade in ihrer Entdeckung, Analyse und wirksamen Bekämpfung besteht im wesentlichen die sprachphilosophische bzw. sprachkritische Aufgabe des Logikers.

Ich habe bereits darauf hingewiesen, daß für Frege die Konstruktion einer der *logischen* Syntax gehorchenden Präzisionssprache primär durch die Ziel-

3 In jüngster Zeit hat P. Lorenzen im Rahmen seines Versuchs, die Arithmetik operativ bzw. konstruktiv zu begründen, das synthetische Apriori Kants für die arithmetisch-wahren Sätze als erfüllt nachgewiesen. Im Unterschied zu den analytisch-wahren Sätzen, die wahr sind (a) allein auf Grund der Logik (logische Wahrheiten), (b) allein auf Grund der Logik und mindestens einer Definition (formal-analytische Wahrheiten) und (c) allein auf Grund der Logik, ggf. von Definitionen und mindestens einer Prädikatorenregel (material-analytische Wahrheiten), setzen die arithmetischen Sätze nicht nur die Logik und ggf. eine analytische Bestimmung (Definition oder Prädikatorenregel), sondern zusätzlich mindestens eine Konstruktionsvorschrift für die Zählzeichen voraus. In diesen konstruktiven Regeln sieht denn auch Lorenzen die Rechtfertigung für die Zuordnung der arithmetischen Wahrheiten zur Klasse der synthetisch-wahren Sätze. Da die arithmetisch-wahren Sätze keine sog. empirischen Pädikatoren enthalten — die Prädikationen über die Zählzeichen sind durch Vorschriften (z. B. die Additionsvorschrift) festgelegt —, können sie mit den logisch-wahren Sätzen als formale Wahrheiten zusammengefaßt werden. So bestimmt Lorenzen in Abweichung vom Kantischen Sprachgebrauch die arithmetisch-wahren Sätze schließlich genauer als formal-synthetische Wahrheiten. Die geometrisch-wahren Sätze, die wahr sind allein auf Grund der Logik, ggf. von analytischen oder formal-synthetischen Bestimmungen (Konstruktionsregeln) und mindestens einer ideativen Regel, werden dagegen als material-synthetische Wahrheiten gekennzeichnet. Vgl. W. Kamlah/P. Lorenzen, *Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens*, Mannheim 1967, Kap. VI, insbesondere S. 219 ff.

setzung motiviert war, die Arithmetik in methodisch einwandfreier Weise aufzubauen und so eine sichere Grundlage zur Beurteilung der erkenntnistheoretischen Natur der arithmetischen Aussagen zu gewinnen[4]. Die „Sprache des Lebens" schien ihm zur Verwirklichung des logizistischen Programms ungeeignet, da sie „nicht in der Weise durch logische Gesetze beherrscht [ist], daß die Befolgung der Grammatik schon die formale Richtigkeit der Gedankenbewegung verbürgte" (WBB S. 50). In der Grammatik der Umgangssprache sind Psychologisches und Logisches miteinander vermischt (Log I, S. 6; Log II, S. 154); logische Verhältnisse werden durch sie (die Umgangssprache) zumeist nur angedeutet, nicht aber exakt ausgedrückt (WBB S. 51). Frege weist wiederholt darauf hin, daß die gewöhnliche Sprache nicht einmal der ersten Anforderung genügt, die man an ein für den wissenschaftlichen Gebrauch bestimmtes Zeichensystem stellen muß, nämlich der Anforderung der Eindeutigkeit (WBB S. 50; LM S. 230). So kann z. B. ein aus dem bestimmten Artikel und einem Begriffswort zusammengesetzter Ausdruck wie „das Pferd" im alltäglichen Sprachgebrauch nach Maßgabe der Verständigungssituation den logischen Wert eines Eigennamens (Identifikators) haben; er kann aber auch die Art bezeichnen wie z. B. in dem Satz „Das Pferd ist ein pflanzenfressendes Tier". „Die Sätze unserer Sprache des Lebens überlassen manches dem Erraten. Und das richtige Erraten wird durch die begleitenden Umstände möglich. ... Aber eine für den wissenschaftlichen Gebrauch bestimmte Sprache darf nichts dem Erraten überlassen" (LM S. 230). Ein aus dem bestimmten Artikel und einem Begriffsausdruck zusammengesetzter Eigenname hat in einer wissenschaftlichen Sprache nur dann eine Berechtigung, wenn der Begriff, dessen Bezeichnung dabei gebraucht wird, nicht leer ist und genau ein Gegenstand unter ihn fällt (LPM S. 193). Da ein Ausdruck wie „das Pferd" die letztgenannte Bedingung nicht erfüllt, ist er für den wissenschaftlichen Sprachgebrauch als Eigenname zu verwerfen. Unmittelbar im Zusammenhang mit Beispielen dieser Art steht Freges Forderung, grammatische Kategorien wie „Subjekt" und „Prädikat", die zum festen Bestand der traditionellen Urteilslehre gehören, in der Logik zu vermeiden, „da sie immer wieder dazu verführen, die beiden grundverschiedenen Beziehungen des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff und [der] Unterordnung eines Begriffes unter einen Begriff zu vermengen" (ASB S. 130; vgl. BS § 3; Log II, S. 153, 155). Auf eine scharfe Unterscheidung der Ver-

4 Wittgenstein verfolgt dagegen mit seiner im *Tractatus* programmatisch entworfenen Begriffsschrift eine sprachkritische Klärung der Bedingungen, Möglichkeiten und Grenzen des Sagbaren, d. h. des sinnvollen Sprechens.

wendungen des mehrdeutigen Wortes „ist" in der Umgangssprache und eine Analyse dabei auftretender Fehler hat Frege besonderes Gewicht gelegt[5].
Ein weiteres von Frege exemplarisch angeführtes Indiz für die logische Unvollkommenheit der Wortsprache und daraus resultierender Irreführungen und Fehler ist ihre verhängnisvolle Neigung, bedeutungslose Eigennamen (Scheineigennamen) zu bilden. „Wenn das in der Dichtung geschieht, die jeder als Dichtung versteht, so hat das keinen Nachteil. Anders ist es, wenn es in einer Darlegung geschieht, die den Anspruch auf strenge Wissenschaftlichkeit macht. Ein besonders merkwürdiges Beispiel dazu ist die Bildung eines Eigennamens nach dem Muster ‚der Umfang des Begriffes *a*', z. B. ‚der Umfang des Begriffes *Fixstern*'. Dieser Ausdruck scheint einen Gegenstand zu bezeichnen wegen des bestimmten Artikels; aber es gibt keinen Gegenstand, der sprachgemäß so bezeichnet werden könnte. Hieraus sind die Paradoxien der Mengenlehre entstanden, die diese Mengenlehre vernichtet haben. Ich selbst bin bei dem Versuche, die Zahlen logisch zu begründen, dieser Täuschung unterlegen, indem ich die Zahlen als Mengen auffassen wollte" (EMN S. 288 f.; vgl. LPM S. 198). Frege weist hier in einem kritischen Rückblick auf das Programm des Logizismus darauf hin, daß selbst eine mit dem Anspruch auf logische Vollkommenheit auftretende Wissenschaftssprache, in der jedem rechtmäßig gebildeten Ausdruck genau eine Bedeutung gesichert sein soll, gegen mögliche Fehler nicht vollkommen abgesichert ist. Ein bezeichnendes Beispiel für die Tendenz der Sprache, Scheineigennamen zu

5 Wittgenstein sieht im *Tractatus* den irreführenden Charakter der Umgangssprache in weitgehender Übereinstimmung mit Frege vor allem dadurch bezeugt, „daß dasselbe Wort auf verschiedene Art und Weise bezeichnet ... oder, daß zwei Wörter, die auf verschiedene Art und Weise bezeichnen, äußerlich in der gleichen Weise im Satze angewandt werden" (*Tractatus logico-philosophicus*, in: L. Wittgenstein, Schriften 1, Frankfurt a. M. 1960, 3.323). Als Beispiel unter anderen führt er die Mehrdeutigkeit des Wortes „ist" als Kopula, als Äquivalent für das Gleichheitszeichen und als Ausdruck der Existenz an. „So entstehen leicht die fundamentalsten Verwechslungen (deren die ganze Philosophie voll ist)" (ibid., 3.324). „Um diesen Irrtümern zu entgehen, müssen wir eine Zeichensprache verwenden, ... die der *logischen* Grammatik — der logischen Syntax — gehorcht" (ibid., 3.325; vgl. auch 4.002). Wittgenstein geht also bei seinem Programm einer logisch vollkommenen Wissenschaftssprache ähnlich wie Frege von den Täuschungen und Verwechslungen der Umgangssprache aus, grenzt sich dann aber in wesentlichen Punkten kritisch von Freges Begriffsschrift und der formalen „Idealsprache" der *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell ab. Vgl. *Tractatus*, 3.325, 3.33—3.333, 4.063, 4.1272—4.1273, 4.431, 4.442, 5.02, 5.132, 5.4, 5.42, 5.452, 5.4733, 5.521, 5.525, 5.53—5.5352, 5.553, 6.1232, 6.1233, 6.1271, 6.232.

schaffen, ist nach Frege bereits ein Ausdruck wie „der Begriff *Fixstern*", in dem die prädikative Natur des Begriffs durch den bestimmten Artikel verhüllt wird (EMN S. 289). „Die Sprache stempelt so einen Begriff zu einem Gegenstande, indem sie seine Bezeichnung nur als Eigennamen in ihr grammatisches Bauwerk einzufügen weiß. Aber damit begeht sie eigentlich eine Fälschung" (LPM S. 192). Ein Ausdruck der Form „der Begriff Φ" ist jedoch in seinem Charakter als Scheineigenname von einem Scheineigennamen der Form „der Umfang des Begriffs Φ" im Kontext der Fregeschen Logik und Philosophie auf folgende Weise zu unterscheiden. Wenn der Logiker von Begriffen zu sprechen beabsichtigt, so befindet er sich nach Frege in der kaum vermeidbaren Zwangslage, Ausdrücke zu gebrauchen, die entgegen ihrer grammatischen Form gerade nicht zur Bezeichnung eines Gegenstandes dienen sollen (ASB S. 132 f.; LPM S. 192; EL S. 210)[6]. Anders verhält es sich mit der Rede von Begriffsumfängen, die Frege im logischen System der „Grundgesetze" mit Wertverläufen spezieller einstelliger Funktionen identifiziert. Die so verstandenen Begriffsumfänge werden dort explizit als Gegenstände eingeführt und durch Eigennamen besonderer Art, nämlich durch schematisch gebildete Wertverlaufsnamen bezeichnet. Die Besonderheit der Wertverlaufsnamen als Gegenstandsnamen zeigt sich darin, daß sie nur dann bedeutungsvoll sind, wenn der Name der dem Wertverlauf zugeordneten Funktion eine Bedeutung hat. Da sich — wie bereits erwähnt — im System der „Grundgesetze" Begriffsausdrücke bilden lassen, denen nach Freges Bedeutungskriterien keine Bedeutung zugewiesen werden kann, hat jeder Eigenname des entsprechenden Begriffsumfangs den Status eines Scheineigennamens. Die zitierten Ausführungen Freges über die Unzulässigkeit der Namen von Begriffsumfängen sind jedoch offensichtlich in einem anderen Sinn zu verstehen. Frege hat in seinen letzten Fragmenten, als ihm das Scheitern seines logizistischen Reduktionsversuchs definitiv erschien und eine geometrische Begründung der Arithmetik in Aussicht genommen wurde, nicht nur die Definition der Zahlen als Begriffsumfänge, sondern die Begriffsumfänge insgesamt als vermeintliche Gegenstände verworfen. Von daher erklärt sich, daß nun *jeder* Ausdruck von der Form „der Umfang des Begriffs Φ" als

6 Allerdings sei auf den Umstand aufmerksam gemacht, daß Frege in „Über Begriff und Gegenstand" (S. 169 ff. [195 ff.]). Ausdrücke von der Form „der Begriff Φ" noch als vollwertige Gegenstandsnamen auffaßt, deren Eigentümlichkeit durch eine Zwangslage der Sprache gerechtfertigt sei. In den „Ausführungen über Sinn und Bedeutung" (S. 132 f.) führt Frege dann in diesem Zusammenhang den Unterschied zwischen „nennen" und „meinen" ein.

Scheineigenname beurteilt und somit als wissenschaftlich unzulässig zurückgewiesen wird.

Die angeführten Beispiele mögen zur Verdeutlichung der Fregeschen These, daß viele Denkfehler ihren Grund in der logischen Unvollkommenheit der Wortsprache haben, genügen. In der kritischen Diagnose der Vagheiten, Verwechslungen und Täuschungen der natürlichen Sprache und ihrer problemauflösenden Beseitigung liegt nach Frege die grundsätzliche sprachphilosophische Aufgabe des Logikers. Die Erfüllung dieser Aufgabe schließt ein, daß der Logiker die durch „Grammatik" und „Psychologie" verunreinigten logischen Strukturen der natürlichen Sprache klar heraussondert (Log II, S. 154). Die Logik hat „die Aufgabe, das Logische von allem Fremdartigen, also auch dem Psychologischen, zu reinigen und das Denken von den Fesseln der Sprache zu befreien, indem sie deren logische Unvollkommenheiten aufweist" (Log II, S. 160 f.). „Die logische Arbeit ist gerade zu einem großen Teil ein Kampf mit den logischen Mängeln der Sprache, die uns doch wieder ein unentbehrliches Werkzeug ist. Erst nach Vollendung unserer Arbeit werden wir ein vollkommeneres Werkzeug haben" (MLE S. 272; vgl. Log I, S. 7; Log II, S. 155; EMN S. 289)[7].

7 Vgl. Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen,* in: L. Wittgenstein, Schriften 1, Frankfurt a. M. 1960, § 109: „Die Philosophie ist ein Kampf gegen die Verhexung unseres Verstandes durch die Mittel unserer Sprache". Diese Bemerkung steht jedoch in einem sprachphilosophischen Kontext, der sich von dem ähnlich lautender Bemerkungen Freges wesentlich unterscheidet. Wittgenstein hat bekanntlich in seinen späteren Schriften das im *Tractatus* verfolgte Ideal einer den Regeln der logischen Syntax gehorchenden Präzisionssprache im Zuge einer selbstkritischen Auseinandersetzung aufgegeben. „Die Kristallreinheit der Logik" hatte sich ihm im *Tractatus* nicht ergeben, „sondern sie war eine Forderung" (ibid., § 107), ein bloßes *Vorurteil,* das es in den *Philosophischen Untersuchungen* dadurch zu beseitigen gilt, daß die sprachkritische Betrachtung „um unser eigentliches Bedürfnis als Angelpunkt" (ibid., § 108) gedreht wird. Während das eigentliche Bedürfnis als Angelpunkt die sprachkritische Klärung der Bedingungen, Möglichkeiten und Grenzen sinnvollen Sprechens sowie die damit verbundene Beseitigung der durch ein Mißdeuten unserer Sprachformen bedingten Irrtümer bleibt, ist die gedrehte Betrachtung nicht mehr vom Blickpunkt der Logik bestimmt (ibid., §§ 81, 88—92, 97—108), sondern grammatischer Natur, indem sie das tatsächliche „Arbeiten" und „Funktionieren" unserer Sprache beschreibt und übersichtlich macht (ibid., §§ 109, 122, 124—126, 130, 132 f.). „Einerseits ist klar, daß jeder Satz unserer Sprache ‚in Ordnung ist, wie er ist'. D. h., daß wir nicht ein Ideal *anstreben:* Als hätten unsere gewöhnlichen, vagen Sätze noch keinen ganz untadelhaften Sinn und eine vollkommene Sprache wäre von uns erst zu konstruieren. — Andererseits scheint es klar: Wo Sinn ist, muß vollkommene Ordnung sein. — Also muß die vollkommene Ordnung auch im

Nun lassen sich die logischen Mängel der natürlichen Sprache umgehen, wenn man bei der Verfolgung eines wissenschaftlichen Programms eine künstliche Sprache verwendet, die höchsten Ansprüchen an die Beweisführung genügt (EMN S. 298). Frege selbst hat von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht, indem er seine idealtypisch entworfene Begriffsschrift in den Dienst einer logisch exakten Begründung der Arithmetik gestellt hat[8]. Inwiefern kann aber die Arbeit des Logikers angesichts dieses praktikablen Auswegs aus dem Netz der Mehrdeutigkeiten und Irreführungen der gewöhnlichen Wortsprache noch notwendig in einer sprachphilosophischen Analyse der Eigentümlichkeiten eben dieser Sprache — in der sie selbst durchzuführen ist — bestehen? Die Beantwortung dieser Frage läßt sich aus Freges Schriften relativ leicht entnehmen.

Zunächst ist als wesentlich festzuhalten, daß die natürliche Sprache sowohl für den propädeutischen Teil einer Wissenschaft als auch für die Konstruktion des wissenschaftlichen Systems selbst „ein unentbehrliches Werkzeug" ist. Freges definitionstheoretische Überlegungen zeigen, daß der Gebrauch der gewöhnlichen Wortsprache für die Propädeutik eines wissenschaftlichen (z. B. eines mathematischen) Systems insofern unvermeidlich ist, als nur auf diese Weise eine Verständigung über die Bedeutung der einzuführenden

vagsten Satze stecken" (ibid., § 98). Die Einsicht, daß alle Sätze der Umgangssprache, so wie sie sind, logisch vollkommen geordnet sind, ist Wittgenstein auch im *Tractatus* nicht verborgen geblieben (op. cit., 5.5563). Doch was sich durch die Drehung der Betrachtungsweise geändert hat, ist dies, daß den philosophischen Mißverständnissen nicht mehr durch eine formalsprachlich konzipierte Wissenschaftssprache zu entgehen versucht wird; statt dessen werden die philosophischen Probleme „durch eine Einsicht in das Arbeiten unserer Sprache gelöst, und zwar so, daß dieses erkannt wird: *entgegen* einem Trieb, es mißzuverstehen" (*Philosophische Untersuchungen*, § 109). Auf der Basis einer Einsicht in das Arbeiten unserer gewöhnlichen Sprache (*entgegen* einem Trieb, es mißzuverstehen) und einer übersichtlichen Darstellung ihrer Grammatik ist die gewöhnliche Sprache für den späten Wittgenstein eine Idealsprache, und zwar in dem Sinne, daß sie nach der Darstellung ihrer Grammatik als eine Sprache einzusehen ist, die zu keinen Verwirrungen Anlaß gibt, daß über sie „nicht mehr Skrupel gerechtfertigt [sind], als ein Schachspieler über das Schachspiel hat, nämlich keine" (*Philosophische Grammatik*, Wittgenstein, Schriften 4, Frankfurt a. M. 1969, S. 121). Skrupel über unsere Sprache — das wären nach Wittgenstein lediglich Mißverständnisse (vgl. *Philosophische Untersuchungen*, § 120).

8 Die in den „Grundgesetzen" dargelegte Begriffsschrift weicht von der ursprünglich entworfenen Begriffsschrift Freges durch Änderungen und Ergänzungen ab. Für eine der folgenreichsten Ergänzungen seiner früher entwickelten Begriffsschrift hält Frege die Einführung der Wertverlaufsnotation.

Kunstausdrücke und eine interpersonelle Mitteilung der Wissenschaft erreicht werden kann. Die dem Aufbau des Systems vorausgehende „umgangssprachliche" Einführung logischer Urelemente und ihrer Bezeichnungen geschieht nach Frege in Form von *Erläuterungen*. Diese dienen dazu, die Bedeutung der logischeinfachen und folglich nicht definierbaren Zeichen des betreffenden Systems bestimmt festzulegen und mögliche Mißverständnisse unter den Forschern auszuschließen. So läßt sich nach Frege — um ein bezeichnendes Beispiel für die Unentbehrlichkeit der gewöhnlichen Sprache beim Aufbau eines wissenschaftlichen Systems zu geben — das nicht definierbare Wort „wahr", obgleich es inhaltsleer zu sein scheint, bei der Grundlegung der Logik nicht vermeiden, was auf der Unvollkommenheit dieser Sprache beruht. „Hätten wir eine logisch vollkommenere Sprache, so brauchten wir vielleicht weiter keine Logik oder wir könnten sie aus der Sprache ablesen" (MLE S. 272). Daß die natürliche Sprache nicht nur für eine Propädeutik, sondern auch für den Aufbau eines wissenschaftlichen Systems ein unumgängliches Hilfsmittel ist, läßt sowohl die *Begriffsschrift* als auch der semantische und syntaktische Aufbau des Systems der Mengenlehre in den „Grundgesetzen" deutlich erkennen[9]. Da aber das für die Einführung einer als logisch vollkommen intendierten Sprache „unentbehrliche Werkzeug" logische Mängel enthält, die zu Fehlern verführen, bedarf es notwendig eines sprachphilosophischen Klärungsprozesses. Dieser hat sich so zu vollziehen, daß der Logiker mittels einer sprachkritischen Reflexion Einsicht in die eigentümlichen Funktionsweisen der natürlichen Sprache gewinnt und ihre durch „Grammatik" und „psychologische Elemente" verdeckten logischen Strukturen freilegt. Nur dann, wenn die natürliche Sprache solcherweise von ihren die Konstruktion eines logischen Systems behindernden Mängeln gereinigt wird, kann der Logiker seine eigentlich aufbauende Arbeit mit dem Maß an Genauigkeit und Zuverlässigkeit durchführen, das wissenschaftlich unverzichtbar ist.

Freges logisch-sprachphilosophische Untersuchungen haben eine ganze Reihe von Ergebnissen hervorgebracht, auf denen die moderne sprachanalytische Philosophie in wesentlichen Teilen aufbauen konnte. Zu nennen sind hier vor allem seine Unterscheidungen im Bereich der elementaren Prädikation, seine syntaktische Analyse des Aufbaus von Sätzen aus ihren Komponenten

9 In den Beweisen der Grundgesetze der Anzahl verwendet Frege nur in den Zerlegungen neben begriffsschriftlichen Ausdrücken Sätze der natürlichen Sprache. Die Beweiskraft liegt jedoch allein in dem jeweils rein begriffsschriftlich formulierten *Aufbau*.

und die Theorie über Sinn und Bedeutung. Es ging mir in den vorangehenden Ausführungen jedoch weder um eine Aufzählung und Beleuchtung der sprachphilosophischen Errungenschaften Freges noch um eine Beschreibung seines Einflusses auf die moderne sprachanalytische Philosophie. Der Leser dieser Aufsatzsammlung wird Erläuterndes und Kritisches zu Freges Sprachphilosophie im zweiten und dritten Band finden. Bei meinem Versuch, den *grundsätzlichen* Zusammenhang zwischen Logik und sprachphilosophischer Analyse bei Frege aufzuzeigen, schien es mir aber angebracht, auf Übereinstimmungen und Unterschiede zwischen Frege und Wittgenstein in der Beurteilung des Verhältnisses von natürlicher Sprache und künstlicher Idealsprache hinzuweisen. In einer detaillierten und vorurteilslos-kritischen Untersuchung dieses hier nur ganz allgemein angeschnittenen Problembereichs, die auch Wittgensteins Philosophie der Mathematik angemessen berücksichtigen müßte, sehe ich eine lohnende Aufgabe sowohl der Frege- als auch der Wittgensteinforschung.

Hans D. Sluga

1. Frege as a Rationalist

I

When Gottlob Frege died in 1925 few philosophers knew much about him. Since then his reputation has undergone remarkable change. It has come to be recognized that Frege has contributed substantially to the formation of philosophy in the twentieth century. He achieved this effect mainly though his influence on a few significant figures, most prominent among them Husserl, Russell, Wittgenstein, and Carnap. Contemporary symbolic is to a large part derived from Frege's work and much of the recent discussion in the philosophy of language as well as in the philosophy of mathematics would not have been possible without his ground-breaking efforts.
In his just published monumental study of Frege's philosophy of language, Michael Dummett has concluded that Frege must be considered „one of the great figures of the past hundred years" in the fields of philosophy and mathematics (p. xiii)[1]. If Frege's role is indeed so important, and that can be argued with some justification, it seems useful to get clearer about the philosophical position that made those achievements possible.

II

Recent discussion of Frege's work betrays much confusion about Frege's philosophical position and the background from which it developed.
Nothing illustrates this point better than Michael Dummett's analysis of Frege's philosophy. In his book he describes Frege as „a realist in revolt against the prevailing idealism of his day" (D, p. 197) who was „defying the whole idealist tradition which dominated the German philosophy of his day" (D, p. 198). Moreover, this „idealism of his day was entangled with

1 Michael Dummett, *Frege. The Philosophy of Language,* London 1973. Hereafter referred to as „D".

an irrelevant psychologism" (D, p. 470), since „idealism is by its very nature more prone to slip into psychologism" (D, p. 684). Finally, Dummett asserts that while today we may see Frege's significance in certain positive achievements, such as the outline of a workable theory of meaning, earlier writers would have seen his importance „in the part he played in bringing about the downfall of Hegelian idealism" (D, p. 683). These comments, if true, would provide important data that could help to explain the initial delay in the recognition of Frege's importance for the development of modern philosophy. Unfortunately, they are not well-founded and merely help to show up the confusions that still exist about the course of philosophy in the last century. It is important to notice Dummett's misrepresentation of the true historical situation, because his interpretation of Frege as a „realist" in opposition to a prevailing idealism leads him to misread important details of Frege's philosophy. In particular, it makes him overlook the close relationship between Frege and the philosophical tradition, specifically Leibniz and Kant, whose views appear closer to idealism than to realism.

It is by no means difficult to see why Dummett's interpretation is mistaken. Hegelian idealism had in fact completely collapsed in Germany twenty-five years before Frege ever set pen to paper. The psychologism that Dummett somehow associates with idealism is the child of quite different parents. It derives on the one hand from biological and physiological studies such as those conducted by Darwin and Helmholtz, and on the other from a Humean empiricism, and not from any form of Hegelian idealism. Frege's two great targets of attack, psychologism and formalism, are, in fact, both the result of a philosophical naturalism that became influential in the middle of the nineteenth century[2]. In contrast, the German idealists are never mentioned by name in Frege's writings and only occasionally criticized as a group.

What may have confused Dummett in his interpretation of the historical situation is the fact that by the close of the century scientific naturalism, which had also been immensely influential in England, had come under a counter-attack from a number of English Hegelians, and that Moore and Russell who had originally been under their influence came to revolt against them by subscribing (at least, initially) to an extreme form of realism. Though the connection between Russell and Frege may suggest this, one cannot conclude that Frege's philosophy is likewise a realistic attack on a dominant Hegelianism.

2 One of the great propagators of this naturalistic philosophy was Ernst Haeckel, who actually taught at the University of Jena while Frege was there.

In calling Frege a realist Dummett has laid much stress on the supposed ontological implications of Frege's doctrines. That corresponds to a well-established trend in the interpretation of Frege's writings. Much has been made of Frege's so-called platonism. Various remarks by him in the essay „On Sense and Reference", in the Preface of the *Grundgesetze*, and in the later paper „The Thought" have led to the conclusion that Frege was centrally concerned with the setting up of a platonic ontology. Others have gone so far as to speak of Frege's hidden nominalism[3].

Frege's theory of the objectivity of numbers, value-ranges, functions, etc., was never intended as an ontological theory. It must rather be compared with Lotze's theory of validity, from which it may be historically derived. According to Lotze, ideal objects are not real, but merely posses validity. Lotze thought that drawing this distinction (which is paralleled by Frege's distinction between reality and objectivity as he makes it in the Preface to the *Grundgesetze*) preserves what is true in Plato's theory of ideas while being beyond both realism and nominalism. The latter are, according to Lotze, predominantly concerned with metaphysical issues, that is, with something that has „other than purely logical importance", whereas presumably the notion of validity is not a metaphysical but a logical one[4]. That is not to say that Frege's and Lotze's doctrines are at all clear, but it is obviously a mistake to regard them as ontological theories, at least according to the intentions of their authors.

If the philosophy of mathematics and the philosophy of logic have recently been dominated by ontological considerations that is not due to the influence of Frege's thought. Such ontological questions seem to derive from a number of different sources, such as Cantor's examination of infinite totalities, Moore's and Russell's realism which they conceived in opposition to their own earlier idealistic monism, and not least from the issues that have arisen out of Russell's discovery of the logical antinomies.

To approach Frege's thought from an ontological point of view is to approach it completely unhistorically. Frege's concern is rather with a question familiar to him from Leibniz and Kant about the power of reason and the ultimate ground of justification of arithmetical propositions. Frege's question was

3 For this whole discussion see the papers in the volume *Essays on Frege*, ed. E. D. Klemke, Urbana, Chicago and London 1968. See also my critical note on this volume in *Philosophy*, vol 45, 1970, p. 75.

4 H. Lotze, *Logic*, translated by B. Bosanquet, Oxford, 2nd ed. 1888, vol. II, p. 267.

not whether numbers exist, but whether the laws of numbers are principles of reason. To read Frege's writings from an ontological point of view is as unilluminating as reading the *Critique of Pure Reason* from that point of view. Although it may be true that Kant was ontologically speaking a conceptualist, saying so contributes little to an understanding of the *Critique*. For Leibniz, Kant, and Frege, thinking about logic and mathematics is fundamental to philosophy, not because it settles ontological issues, but because it is the study of reason itself.

In accordance with a contemporary view that closely links ontological problems to logical ones, Dummett has also maintained that Frege displaced epistemology from its position as „first philosophy" and that he put logic into that place. It is, presumably, in this sense that Dummett calls Frege „the first modern philosopher". Dummett believes that Frege's position in this respect is reminiscent of that of Aristotle and the Scholastics. But the comparison is neither convincing nor illuminating. It seems based on a rather sketchy view of the history of philosophy which Dummett describes in this way:

> Descartes's revolution was to make epistemology the most basic sector of the whole of philosophy ... Descartes's perspective continued to be that which dominated philosophy until this century, when it was overthrown by Wittgenstein, who in the *Tractatus* reinstated philosophical logic as the foundation of philosophy (D, p. xv).

He adds that, though Frege did not explicitly discuss this issue, „by his practice he demonstrated his opinion that logic could be approached independently of any prior philosophical substructure" (*Ibid.*).

It is correct that modern philosophy after Descartes paid comparatively little attention to logic and the philosophical insights to which it can give rise. It is also true that some modern philosophers were much concerned with „epistemological" problems in the sense of problems of perceptions and that Wittgenstein and Frege do not concern themselves with such problems. But that does not mean that they regard logic as „first philosophy" or as a substitute for epistemology. For both logic is a tool for the investigation of other problems. For the Wittgenstein of the *Tractatus* the central problem seems to be to determine the range and the limits of what is sayable. For Frege logic is a tool for the determination of the status and nature of mathematical propositions and, thereby, of the opposing claims of empiricism and rationalism.

Throughout the period of modern philosophy, rationalistic philosophers have made use of logic as a tool for the defence of their rationalistic conclusions.

That is particularly true in German philosophy. It is obvious that for Leibniz logic is of primary significance in philosophy; but the same is true of Kant, though interpretations of Kant's philosophy that are derived from his supposed dependence on Hume have largely overlooked this point. Such interpretations completely fail to account for the fact that the central part of Kant's *Critique of Pure Reason* is called a „Transcendental Logic". The significance of logic to philosophy is even greater for Hegel and the German Idealists, though their actual conception of logic may have been different from that of contemporary logicians.

Frege's philosophy and the philosophy of the Tractatus therefore constitute no radical departure from the whole of modern philosophy. Rather, they are related to the rationalist strand within modern philosophy. This is important, because Dummett's comparison of Frege with Aristotle and the Scholastics obscures the more important connection between Frege and Wittgenstein, on the one hand, and Leibniz and Kant, on the other.

III

The nature of Frege's philosophical concerns can be seen clearly from his early writings, some of them published only posthumously[5]. Of special interest are his doctoral dissertation of 1873, and his Habilitationsschrift of 1874 which indicate the ideas out of which the logic of the *Begriffsschrift* developed.

The doctoral dissertation is entitled „On a Geometrical Representation of Imaginary Figures in the Plane" and reflects Fregean views on geometry that seem to have endured through his later development. The fundamental claim of the dissertation is that „the whole of geometry rests, in the last resort, on axioms that derive their validity from the nature of our ability to intuit *(Anschauungsvermögen)*" (GD p. 1 [3]). Imaginary figures appear to present a difficulty for this thesis, since they often exhibit characteristics that seem to contradict intuition. In order to resolve the problem the notion of imaginary figure must undergo examination. It can be understood in analogy to another notion, that of an infinitely distant point. That concept,

5 References to Frege's published essays will be made through G. Frege, *Kleine Schriften*, ed. I. Angelelli, Hildesheim 1967. References to Frege's posthumously published writings will be to G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, ed. H. Hermes *et al*, Hamburg 1969. All quotations are translated by the author.